ALAIN VAN KERCKHOVEN

PETIT PRÉCIS D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE

à l'usage des étudiants de secondaire et des curieux de tout âge

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \approx 0{,}20787$$

PETIT PRÉCIS D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE

à l'usage des étudiants de secondaire et des curieux de tout âge

DU MÊME AUTEUR

FICTIONS

OR (Uqbar, 2025)
Les Nières (Uqbar, 2023)
Motel California (Chloé des Lys, 2022)
Le Temps des lumières montantes (Uqbar, 2021)
Brooklyn Café (Chloé des Lys, 2020)
Des miettes dans le lit (Chloé des Lys, 2019)

LIVRETS ET MÉLODIES

Béryllium (Klarthé, 2021)
La Fille du roi d'Écosse (Klarthé, 2021)
Trois Images de Magali (Klarthé, 2021)
Trois Regards sur Arlequin (Éditions Delatour, 2015)
Three Philosophers Songs (Éditions Delatour, 2013)
El Niño de Atocha (Éditions Delatour, 2011)
La Complainte des esclaves (Éditions Delatour, 2010)
Les Chants de Casanova (Éditions Delatour, 2009)
Anamnèse (Éditions Delatour, 2000)

ESSAIS

Fondements naturalistes de l'anarchisme (L'Harmattan, 2026)
Nature Humaine : Industrialisation des affects et dégradation du réel (Uqbar, 2020, 2023)
Le Libre Arbitre : Esquisse d'une métaphysique de la liberté (L'Harmattan, 2017)
POMO, inc. (Fibonacci Publishing, 2002)
L'Audience planétaire (Mensa Be, 2000)
The Computer Music Lexicon (ACME, 1993)
Lexique d'informatique musicale (ACME, 1992)

ALAIN VAN KERCKHOVEN

PETIT PRÉCIS D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE

à l'usage des étudiants de secondaire et des curieux de tout âge

version 1.6

AVERTISSEMENTS

L'auteur décline toute responsabilité quant à toute erreur, omission ou interprétation erronée pouvant résulter de l'utilisation de cet ouvrage. Le lecteur est fortement encouragé à vérifier toutes les informations, formules et méthodes présentées avant de les appliquer dans des situations réelles.

En aucun cas, l'auteur ne pourra être tenu responsable de quelque préjudice, perte ou dommage direct ou indirect découlant de l'utilisation de ce livre, y compris, mais sans s'y limiter, les dommages résultant de l'utilisation incorrecte des informations présentées ou de l'incapacité à les utiliser.

À Dan et Naomi

INTRODUCTION

L'algèbre constitue la langue fondamentale des mathématiques, offrant un cadre universel pour manipuler les symboles et explorer les règles sous-jacentes aux opérations élémentaires. Bien plus qu'un simple outil technique, elle incarne l'art de travailler avec de nombreuses structures afin de résoudre des problèmes, d'établir des relations, de modéliser des phénomènes et de prédire des résultats.

Mais si l'algèbre est l'épine dorsale des mathématiques, son influence dépasse largement le cadre académique. Son approche méthodique et ses solutions élégantes lui permettent d'intervenir dans de très nombreuses disciplines. En physique, elle aide à formuler les lois de la mécanique, de l'électromagnétisme et de la relativité. En chimie, elle éclaire les réactions moléculaires. En informatique, elle constitue la base de nombreux algorithmes et structures de données.

En outre, son influence dépasse les sciences exactes. En finance, elle est centrale pour modéliser les risques, prévoir les fluctuations des marchés et élaborer des stratégies. Elle est également essentielle dans les sciences humaines : en économie, pour analyser les comportements des agents, en sociologie, pour modéliser les interactions sociales, et en psychologie, pour traiter des ensembles de données et dégager des tendances.

Ainsi, la vénérable algèbre reste une discipline vivante et essentielle, évoluant sans cesse pour répondre aux défis des sciences, de la technologie et de la société contemporaine.

Ce précis s'adresse aux étudiants novices ou intermédiaires, ainsi qu'aux curieux souhaitant approfondir leur compréhension de cette discipline. Cet ouvrage se limite aux concepts fondamentaux abordés au collège, au lycée et en début d'enseignement supérieur. Il n'aborde ni les notions avancées ni les combinaisons et permutations, qui relèvent de la combinatoire.

Il n'est pas un traité : il renonce à une terminologie parfaite et à un formalisme rigoureux pour privilégier des explications accessibles. Certaines démonstrations complexes ou hors sujet sont omises. L'objectif est de présenter les notions brièvement, avec des exemples détaillés et des exercices pour vérifier leur intégration. Ce manuel dense exige une lecture attentive des exemples et la résolution des exercices. Il est également conseillé de mémoriser les équations encadrées comme repères clés.

Autant que possible, le lecteur devra vérifier par lui-même l'exactitude de ses réponses, par exemple en substituant les inconnues des équations de départ par les valeurs trouvées, en développant ce qui a été simplifié ou en vérifiant les valeurs numériques à la calculatrice. Ces vérifications sont donc absolument indispensables pour chaque exercice qui s'y prête. Pour les exercices ne permettant pas ces autocorrections (signalés d'un pictogramme 💡), les réponses sont présentes en fin de document. Les illustrations sont issues de Wikimedia ou réalisées par l'auteur sur Geogebra.

Cette version 1.6 profite d'une large réécriture des introductions et d'une mise en page voulue plus claire. Si nous l'avons amputée de deux passages trop techniques (séries de Fourier, comatrices), elle est en revanche augmentée d'un chapitre sur les interprétations géométriques et les domaines de solutions (3.4) et d'un approfondissement du produit nul (4.2).

Merci à Barbara Roose dont les indispensables relectures éviteront à l'auteur pas mal de situations embarrassantes.

TABLE DES MATIÈRES

SYMBOLES UTILISÉS

$=$	**Égalité** : $a = b$ signifie que a et b ont la même valeur.
$>$	**Supériorité** : $a > b$ signifie que a est supérieur à b.
$\geq$	**Supérieur ou égal** : $a \geq b$ signifie que a est supérieur ou égal à b.
$<$	**Infériorité** : $a < b$ signifie que a est inférieur à b.
$\leq$	**Inférieur ou égal** : $a \leq b$ signifie que a est inférieur ou égal à b.
$\approx$	**Approximation** : $1/3 \approx 0{,}33$ signifie que $1/3$ est approximativement égal à $0{,}33$.
$\neq$	**Différence** : $a \neq b$ signifie que a et b n'ont pas la même valeur.
$\sum_{i=0}^{n} x_i$	**Sommation** : Additionne tous les termes x_i avec $0 \leq i \leq n$.
$\prod_{k=1}^{n} A_k$	**Produit** : Multiplie tous les termes A_k avec $0 \leq k \leq n$.
$\therefore$	**Déduction** : AB signifie que si A, alors B.
$\rightarrow$	**Attribution** : $A \rightarrow 10$ signifie que A prend la valeur de 10.
$\downarrow$	**Indéterminé** : $A \downarrow$ signifie que A n'a pas de valeur déterminée.
$\neg$	**Négation** : $\neg A$ est faux si A est vrai, et vrai si A est faux.
$\wedge$	**Conjonction** : $A \wedge B$ signifie « A et B ».
$\vee$	**Disjonction** : $A \vee B$ signifie « A ou B »
$\Rightarrow$	**Implication** : $A \Rightarrow B$ signifie que A implique B.
$\Leftrightarrow$	**Équivalence** : $A \Leftrightarrow B$ signifie que les expressions A et B sont équivalentes.
$\forall$	**Qualificateur universel** : $\forall a$ signifie « Pour tout a »
$\exists$	**Qualificateur existentiel** : $\exists x$ signifie « il existe x »
ssi	**Si** et seulement si
$\emptyset$	**Ensemble vide**

1. NOTIONS ÉLÉMENTAIRES

Ce premier chapitre constitue la fondation sur laquelle repose l'ensemble du parcours proposé dans ce précis. Avant de manipuler des symboles, de résoudre des équations ou de faire dialoguer des structures abstraites, il est indispensable de s'entendre sur ce que l'on manipule : les nombres et les opérations qui les relient.

Le propos est volontairement élémentaire. Il s'agit de revenir aux concepts les plus fondamentaux, non pour les redécouvrir, mais pour les stabiliser. Ces objets, que l'on croit souvent parfaitement connus, sont en réalité le résultat d'une longue élaboration historique : l'introduction du zéro, l'acceptation des nombres négatifs ou encore l'usage systématique des fractions ont chacun représenté, en leur temps, de véritables ruptures conceptuelles. Aujourd'hui banals, ils constituent pourtant le socle silencieux de toute l'algèbre.

Ce chapitre sera donc volontairement théorique. Il introduira des définitions et des conventions qui ne donnent pas lieu à démonstration, non par manque de rigueur, mais parce qu'elles servent précisément de point de départ au raisonnement algébrique. À ce titre, elles doivent être acceptées comme des règles du jeu avant que la partie ne commence.

Le lecteur déjà familier avec ces notions pourra, sans dommage, parcourir ce chapitre rapidement, voire le laisser de côté. Il pourra toutefois y revenir au besoin : l'expérience montre que même les évidences gagnent parfois à être formulées clairement, surtout lorsqu'on s'apprête à bâtir dessus tout un édifice.

Avant tout, il importe de comprendre ce qu'est un **nombre**. L'efficacité de l'arithmétique nous fait souvent utiliser ce concept sans en saisir la nature profonde. Un nombre peut être vu comme *l'ensemble des ensembles ayant le même nombre d'éléments* (cardinal). Ainsi, le nombre 2 est l'ensemble de tous les ensembles contenant deux éléments.

Une construction plus rigoureuse[1] de la notion de nombres repose sur les éléments suivants :

1. Le nombre **zéro** est défini comme l'ensemble vide $\emptyset$, c'est-à-dire l'ensemble qui ne contient aucun élément.
2. Pour tout nombre n, le successeur de n est défini comme l'ensemble contenant n.
3. Les autres nombres naturels sont obtenus en itérant le processus de création de successeurs à partir du zéro. Par exemple, 1 est le successeur de 0, 2 est le successeur de 1, 3 est le successeur de 2, et ainsi de suite.

1.1. Les nombres entiers naturels

Les premiers nombres entiers à considérer sont ceux que nous utilisons naturellement pour dénombrer des objets. Ces **entiers naturels** constituent la base de l'arithmétique et constituent un ensemble infini noté $\mathbb{N}$.

Notons toutefois qu'il n'existe pas de consensus concernant le nombre zéro. Selon les auteurs, la liste des entiers naturels commence donc comme ceci :

$$1, 2, 3, 4, 5 \ldots$$

ou comme ceci :

$$0, 1, 2, 3, 4 \ldots$$

Bien sûr, les notions d'emprunt, de perte ou de sous-sol d'immeuble nécessitent de prolonger aussi cette liste vers la gauche

[1] Whitehead, Alfred North and Russell, Bertrand. *Principia Mathematica*.: Cambridge University Press, 1925--1927.

afin d'y intégrer des entiers négatifs. Si nous contractons une dette ou que nous descendons à la cave, nous entrons dans l'univers des **entiers relatifs**, lui aussi infini, et cette fois noté $\mathbb{Z}$ (et qui inclut donc $\mathbb{N}$).

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots$$

1.2. Les nombres rationnels

Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'exprimer comme le quotient de deux entiers relatifs. Ce quotient pouvant être lui aussi un entier relatif, il s'ensuit que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels englobe à son tour l'ensemble $\mathbb{Z}$.

Exemple :

$$\frac{7}{3} \approx 2{,}3333 \dots$$

Le développement décimal d'un nombre rationnel est toujours périodique au bout d'une certaine décimale, même s'il s'agit de la répétition de zéros qui ne sont naturellement pas notés[2].

Exemple :

$$\frac{15}{8} = 1{,}87500000 \dots = 1{,}875$$

1.3. Les nombres réels

Les **nombres réels** constituent une nouvelle extension des nombres rationnels. Leur ensemble $\mathbb{R}$ comprend tous les nombres

2 Nous verrons ultérieurement (3.1. Équations linéaires) comment trouver la fraction à l'origine d'un nombre rationnel.

qui peuvent être représentés sur une droite numérique continue, sans trous ni interruption. Cette droite numérique comprend donc aussi des **nombres irrationnels** ne pouvant pas être représentés par une fraction, comme π ou $\sqrt{2}$.

Les nombres réels ont certaines caractéristiques importantes :

- Entre deux nombres réels quelconques, il existe toujours une infinité de nombres réels supplémentaires ;
- Il n'y a ni lacunes ni discontinuités dans l'ensemble des nombres réels ;
- Les décimales des nombres irrationnels qu'ils accueillent ne se répètent jamais périodiquement ;
- Les nombres réels sont fermés sous les opérations mathématiques courantes telles que l'addition, la soustraction, la multiplication et la division : le résultat de ces opérations entre des nombres réels est toujours un nombre réel[3].

Les nombres réels correspondent donc à des longueurs que l'on peut mesurer géométriquement. Ils sont donc indispensables pour traiter tout phénomène physique évoluant de façon continue, comme la vitesse d'un corps subissant une accélération.

Exemple :

$$\sqrt{3} = 1{,}732051 \ldots$$

1.4. Les opérations mathématiques de base

Une **opération** mathématique est un processus rigoureusement défini qui prend un ou plusieurs éléments, appelés **opérandes**, pour

[3] Sauf pour la division par zéro… nous y reviendrons.

produire un **résultat**. Avant de les aborder, il importe de définir des caractéristiques que nous allons leur attribuer.

- **Associativité.** Lorsque nous avons plusieurs opérations à faire en série, le résultat ne dépend pas de la façon dont nous regroupons les opérations : $(2+3)+4 = 2+(3+4)$.
- **Commutativité.** Une opération est dite commutative si l'ordre dans lequel on effectue l'opération n'affecte pas le résultat : $2+3=3+2$.
- **Élément neutre.** Il s'agit d'un élément qui ne modifie pas l'opération : $3+0=3$.
- **Élément absorbant.** Il s'agit d'un élément transformant tous les autres nombres en élément absorbant : $42 \times 0 = 0$.

Cela étant posé, nous pouvons aborder les opérations de base qui sont probablement déjà bien connues.

L'**addition** $(+)$ combine deux nombres pour en obtenir la somme. Elle est commutative $(a+b=b+a)$, associative $\big((a+b)+c\big) = a+(b+c))$, et possède un élément neutre : 0.

$$5+3=8$$

La **soustraction** $(-)$ soustrait un nombre d'un autre pour obtenir la différence. Elle n'est ni commutative ni associative et possède le même élément neutre : 0.

$$8-3=5$$

La **multiplication** ($\times$ *ou* $.$) combine deux nombres pour obtenir un produit[4]. La multiplication de deux nombres entiers peut être vue comme une addition répétée d'un des deux nombres un nombre de fois équivalent au second nombre : $3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3$. Cette opération est commutative ($a \times b = b \times a$), associative $\big((a \times b) \times c = a \times (b \times c)\big)$ et possède un élément neutre (1) ainsi qu'un élément absorbant (0).

$$3 \times 2 = 6$$

La **division** ($\div$ *ou* $:$) divise un nombre par un autre pour obtenir un quotient. Elle n'est ni commutative ni associative et possède le même élément neutre : 1.

$$6 \div 2 = 3$$

Une division est en quelque sorte une multiplication inversée :

$$3 \times 2 = 6 \;\Leftrightarrow\; 6 \div 2 = 3$$

Diviser un nombre par un autre revient donc à le multiplier par son inverse :

$$6 \div 2 = 6 \times \frac{1}{2}$$

Zéro étant l'élément absorbant de la multiplication, il n'a pas d'inverse défini puisque n'importe quel nombre multiplié par zéro donne zéro. Par conséquent, la division par zéro est indéterminée et empêche toute résolution algébrique. Cette opération est donc proscrite en algèbre ; nous y reviendrons.

---

[4] Lorsque la multiplication s'opère sur deux variables, le signe $\times$ ou . peut être omis et les deux variables simplement accolées : $ab = a \times b = a.b$.

Modulo (mod)[5] renvoie le reste de la division entière de deux nombres. En d'autres termes, il permet de déterminer ce qui reste après avoir divisé un nombre par un autre :

$$7 \; mod \; 3 = 1.$$

Cet opérateur est associatif, car $(a \; mod \; b) \; mod \; c = a \; mod \; (b \; mod \; c)$, mais n'est pas commutatif (sauf cas triviaux). Il est idempotent, car le résultat reste inchangé s'il est appliqué deux fois à un même nombre :

$$\boxed{(a \; mod \; b) \; mod \; b = a \; mod \; b}$$

Le modulo est notamment utile pour connaître le reste d'une division entière : $7 \; mod \; 3 \; = \; 1$ car $7 = 2 \times 3 + 1$

Deux nombres a et b sont dits « **congruents** modulo n » s'ils ont le même reste lorsqu'ils sont divisés par n. On note alors : $a \equiv b \; mod \; n$.

Les **factorielles** sont un autre concept mathématique fascinant qui nous aident par exemple à compter le nombre de façons différentes de disposer un certain nombre d'objets.

La factorielle d'un nombre entier positif n, notée $n!$ est le produit de tous les entiers positifs de 1 à n :

$$\boxed{n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times n = \prod_{i=1}^{n} i}$$

En outre, pour des raisons de cohérence mathématique, la factorielle de zéro est convenue égale à 1 : $0! = 1$

---

5 En informatique, modulo est généralement désigné par le signe % : $7\%3 = 1$

Exemple :

$$6\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

Il s'ensuit des propriétés importantes :

- *Croissance rapide* : $1\,000\,!$ possède déjà 35 659 chiffres.
- *Récursivité* : $n\,! = (n-1)\,! \times n$.

Notons qu'il existe une **fonction gamma** notée $\Gamma(x)$ qui étend le concept de factorielle aux nombres réels et complexes.

1.5. Racines, exposants et logarithmes

L'**exponentiation** (a^b) consiste à élever un nombre (appelé la base) à une certaine puissance (appelée l'exposant) pour obtenir un résultat, appelé la valeur exponentielle. Cette opération consiste à multiplier n fois un nombre par lui-même, n étant l'exposant de ce nombre : $5^3 = 5 \times 5 \times 5$. L'exponentiation n'est ni commutative ni associative.

$$2^3 = 8$$

Lorsque l'exposant est fractionnaire, il est le plus souvent présenté sous forme de **racine** :

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Les expressions avec racines et exposants ne posent pas de problèmes particuliers à condition de bien maîtriser les lois de multiplication et de puissance des exposants :

$$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

$$\sqrt[x]{x} = x^{1/x}$$

Les **racines** ne sont qu'une notation particulière pour des exposants fractionnaires ; elles bénéficient donc des mêmes propriétés que les exposants :

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} \neq \sqrt{13}$$

Mais on peut bien sûr additionner et soustraire des racines identiques :

$$5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

Les racines étant des puissances, elles peuvent naturellement se multiplier et se diviser elles aussi :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Souvent en outre, il peut être utile de rationaliser un dénominateur, c'est-à-dire d'en enlever la racine en multipliant numérateur et dénominateur par cette racine :

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Les **logarithmes** sont d'autres outils puissants qui nous aident à résoudre des problèmes liés aux nombres et aux échelles variées. Leurs propriétés leur permettent notamment de transformer certaines multiplications en additions, ou encore de résoudre des équations où les inconnues sont des exposants.

Le logarithme d'un nombre x en base b, noté $\log_b(x)$, est l'exposant auquel il faut élever b pour obtenir x. Autrement dit, pour tout $b > 0$:

$$log_b(m) = n \Leftrightarrow b^n = m \Leftrightarrow \sqrt[n]{m} = b$$

Il s'ensuit plusieurs identités évidentes :

$$log_b(1) = 0$$

$$log_b(b) = 1$$

$$log_b(b^c) = c$$

Mais aussi des propriétés qui seront très utiles pour remplacer la multiplication par l'addition et, ce faisant, simplifier diverses autres opérations :

$$log_b(m \times n) = log_b(m) + log_b(n)$$

$$log_b\left(\frac{m}{n}\right) = log_b(m) - log_b(n)$$

$$log_b(m^n) = n \times log_b(m)$$

$$log_b(m) = \frac{log_a(m)}{log_a(b)}$$

Une base logarithmique particulière offre aux logarithmes des propriétés plus intéressantes encore, la base $e = 2{,}718281828459045$ … Il est surtout précieux dans le domaine de l'analyse, mais il importait de le citer ici, car il est parfois utilisé par défaut lorsque la base logarithmique importe peu. Il se note $\ln(m)$ et se nomme **logarithme népérien** ou **logarithme naturel**.

$$\ln(e) = 1$$

$$\boxed{ln\, x \iff log_e\, x}$$

Exercices :

Simplifiez les expressions suivantes (et vérifiez à la calculette).

(1.5.a) $\sqrt{25} + \sqrt{144}$

(1.5.b) $\sqrt{49.6^2}$

(1.5.c) $\frac{2^9}{4^4}$

(1.5.d) $3 + \sqrt{32}$

(1.5.e) $6\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$

(1.5.f) $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$

(1.5.g) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{75}}$

(1.5.h) Que vaut x si $\ln(x) = 2$?

(1.5.i) Simplifiez $\ln(e^3)$

(1.5.j) Si $\ln(a) = 3$ et $\ln(b) = -2$, calculez $\ln(a^2b)$

1.6. Priorité des opérations

Lorsque plusieurs opérations sont présentes dans un calcul, un ordre de p**riorité des opérations** doit être respecté :

1. Traiter le contenu des parenthèses ;
2. Traiter les numérateurs et dénominateurs composés ;
3. Calculer les exposants (et racines) ;
4. Calculer de la gauche vers la droite les multiplications et divisions ;
5. Calculer de la gauche vers la droite les additions et soustractions.

Exemple :

$$(3+5)\times\frac{3-1}{5-3}-5\times 7+3^{2+2}-(3-5)$$
$$(8)\times\frac{2}{2}-5\times 7+3^{4}-(-2)$$
$$(8)\times 1-5\times 7+81+2$$
$$8-35+81+2$$
$$56$$

1.7. Les nombres complexes

Dans ℝ, qu'il soit positif ou négatif, un nombre élevé au carré donne toujours un nombre positif, en manière telle que la racine carrée d'un nombre négatif n'a aucun sens. Les **nombres complexes** sont une extension des nombres réels où une telle opération est permise. Ils permettent notamment de résoudre des équations algébriques pour lesquelles les nombres réels se révélaient insuffisants.

Un nombre complexe est généralement écrit sous la forme d'un binôme :

$$a+bi$$

où a et b sont des nombres réels et i est l'unité imaginaire définie comme suit :

$$\boxed{i=\sqrt{-1}}$$

Dans un nombre complexe $a+bi$, a représente la partie réelle et bi la partie imaginaire. L'ensemble des nombres complexes est noté ℂ.

Leur forme binomiale implique une arithmétique particulière.

L'addition et la soustraction se font composante par composante :

$$\boxed{(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i}$$

La multiplication utilise les règles de distribution et la propriété $i^2 = -1$:

$$\boxed{(a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i}$$

La division nécessite d'introduire préalablement la notion de **nombre conjugué** qui se comprend facilement : le conjugué de $(a + bi)$ est $(a - bi)$. La division s'opère alors par une technique appelée « multiplication par le conjugué du dénominateur » qui s'opère comme suit :

1. Multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur ;
2. Développer les expressions de numérateur et du dénominateur ;
3. Rassembler les termes semblables (les réels avec les réels, les imaginaires purs avec les imaginaires purs) en utilisant le fait que $i^2 = -1$.
4. Exprimer les fractions sous leur forme irréductible et la réponse sous la forme $a + bi$.

Exemple :

On multiplie d'abord par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{6 + 3i}{4 - 2i} = \frac{6 + 3i}{4 - 2i} \times \frac{4 + 2i}{4 + 2i} = \frac{(6 + 3i)(4 + 2i)}{(4 - 2i)(4 + 2i)}$$

On développe ensuite numérateur et dénominateur et on simplifie :

$$\frac{24 + 12i + 12i + 6i^2}{6 + 8i - 8i - 4i^2} = \frac{18 + 24i}{10}$$

On poursuit la division par le réel du dénominateur :

$$\frac{18+24i}{10}=\frac{9}{5}+\frac{12}{5}i$$

Nous n'en avons pas fini avec eux ; un chapitre plus avancé sur les nombres complexes sera proposé ultérieurement, nécessitant des notions algébriques complémentaires afin de pouvoir être pleinement compris.

Notons ici une caractéristique qui pourrait paraître intrigante tant nous avons l'habitude de travailler avec des nombres réels. Si nous choisissons deux nombres réels distincts, il y en aura toujours un plus grand que l'autre, par exemple $5>\sqrt{3}$. $\mathbb{R}$ est donc complètement ordonné. Ce n'est pas le cas de $\mathbb{C}$: nous ne pouvons pas poser, par exemple, que $3-2i$ est plus petit ou plus grand que $1+3i$; cet ensemble n'est pas totalement ordonné.

Outre les mathématiques pures, les nombres complexes sont utilisés en physique pour décrire des phénomènes oscillatoires comme le courant alternatif, mais aussi diverses entités de physique quantique. Il ne s'agit donc pas d'un simple artifice mathématique, mais d'une notion plus profonde qui joue un rôle fondamental dans l'analyse et le traitement de signaux, ainsi par exemple qu'en finance pour modéliser les processus stochastiques.

Exercices :

Réalisez les calculs suivants.

(1.7.a) $(3+2i)+(1-4i)$

(1.7.b) $(3+2i)\times(1-2i)$

(1.7.c) $\frac{5-2i}{1+3i}$

1.8. Les critères de divisibilité

Un **critère de divisibilité** est une particularité d'un entier permettant de déterminer si ce nombre est divisible par un autre. La théorie des congruences permet de déterminer un critère de divisibilité pour n'importe quel entier. Toutefois, après simplification, seuls quelques-uns sont utiles pour tester mentalement la divisibilité d'un nombre.

Exemple :

Nous apprenons qu'un nombre est divisible par 3 *si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par* 3 *(cette condition pouvant s'appliquer par récurrence à la somme des chiffres obtenue). Pourquoi ?*
A est divisible par 3 *si et seulement s'il est congru à 0 modulo 3, soit* $ssi\ A \equiv 0(mod\ 3)$.
Or, $A = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \cdots + 10^n a_n$.
Mais puisque $10 \equiv 1(mod\ 3)$, $10^n \equiv 1(mod\ 3)$.
Donc $A \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n(mod\ 3)$

Voici la table des principaux critères de divisibilité :

Divisible par	*si*
2	le chiffre des unités est pair.
3	la somme de ses chiffres est divisible par 3.
4	le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
5	le chiffre des unités est 0 ou 5.
6	critère de 2 *et* critère de 3.
7	le nombre de dizaines moins deux fois le chiffre des unités est divisible par 7.

8	le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8.
9	la somme de ses chiffres est divisible par 9.
10	le chiffre des unités est 0.
11	la différence entre la somme des chiffres situés aux positions impaires et la somme des chiffres situés aux positions paires est divisible par 11.
12	critère de 3 *et* critère de 4.
25	les deux derniers chiffres sont 00, 25, 50 ou 75

1.9. Les nombres premiers

Les **nombres premiers** jouent un rôle important dans l'arithmétique, et ils sont l'un des piliers de l'algèbre. Les nombres premiers sont comme les pierres fondamentales de l'arithmétique.

Un nombre premier est un entier positif supérieur à 1 qui n'a que deux diviseurs positifs et distincts : 1 et lui-même. Contrairement à une idée largement répandue, 1 n'est donc pas un nombre premier. L'ensemble des nombres premiers est souvent noté $\mathbb{P}$.

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 \dots\}$$

Euclide a démontré qu'il possède une infinité d'éléments. Supposons par l'absurde qu'il n'y ait qu'un nombre fini de nombres premiers, que nous pouvons énumérer de la façon suivante : $p_1, p_2, p_3, \dots\, p_n$. Créons alors un nouveau nombre N en multipliant tous ces nombres premiers ensemble, puis en ajoutant 1. Ce nombre N est-il premier ?

- Si N est premier, alors nous avons trouvé un nombre premier qui n'était pas dans notre liste initiale, ce qui signifie que notre liste était incomplète.
- Si N n'est pas premier, il est divisible par un nombre premier q. Or N n'est divisible par aucun nombre de la liste initiale, puisque le reste serait à chaque fois 1. Donc q est un nombre premier qui ne se trouve pas dans la liste initiale, ce qui signifie aussi que notre liste était incomplète.

Dans les deux cas, nous avons trouvé un nombre premier qui n'était pas dans notre liste initiale, ce qui montre que notre liste était nécessairement incomplète. Par conséquent, il existe une infinité de nombres premiers[6].

Leur importance est telle qu'ils charpentent le **théorème fondamental de l'arithmétique** qui stipule que tout nombre entier positif peut être décomposé en un produit de nombres premiers d'une manière unique, à l'ordre près. C'est comme si les nombres premiers étaient les briques de base des mathématiques comme les atomes sont celles de la chimie.

Mais malgré leur caractère fondamental et la simplicité de leur compréhension, les nombres premiers sont encore aujourd'hui source de très nombreuses questions irrésolues dont, par exemple :

- La **conjecture de Goldbach** propose que tout nombre pair supérieur à 2 puisse être exprimé comme la somme de deux nombres premiers. Bien que cette conjecture ait été vérifiée numériquement pour de grands nombres, elle reste non démontrée.
- La **conjecture des nombres premiers jumeaux** propose qu'il existe une infinité de paires de nombres premiers jumeaux.

---

6 De nombreuses autres démonstrations existent (Kummer, Euler…).

- La **conjecture de Legendre** suggère qu'il existe toujours au moins un nombre premier entre n^2 et $(n+1)^2$ pour tout entier positif n. Ici encore, bien que cela ait été vérifié pour de grands nombres, la conjecture elle-même reste indémontrée.

Exercice :

(1.9.a) 10 864 197 531 est-il un nombre premier ?

1.10. PGCD et PPCM

Le Plus Grand Commun Dénominateur (PGCD) et le Plus Petit Commun Multiple (PPCM) sont deux opérateurs qui sont utilisés dans différents champs de l'algèbre et qui permettent chacun de déterminer une valeur remarquable liant deux nombres entiers.

Le **PGCD** de deux nombres est le plus grand nombre qui divise ces deux nombres sans laisser de reste. Il existe plusieurs méthodes pour calculer le PGCD, mais la division euclidienne est à la fois simple et efficace : pour calculer le PGCD de deux nombres a et b, a étant plus grand que b, on effectue la division euclidienne[7] de a par b. L'on répète ce processus jusqu'à ce que le reste soit zéro. Le diviseur à ce moment-là est le PGCD.

Exemple :

Quel est le PGCD de 48 et 18 ?
48 divisé par 18 donne un quotient de 2 et un reste de 12, continuons.
18 divisé par 12 donne un quotient de 1 et un reste de 6, continuons.

[7] Ou division entière

> *12 divisé par 6 donne un quotient de 2 et un reste de 0, nous pouvons arrêter.*
> *Le dernier diviseur (6 dans cet exemple) est le PGCD de 48 et 18.*

De son côté, le **PPCM** de deux nombres est le plus petit nombre qui est un multiple commun à ces deux nombres. Ici encore, il y a plusieurs méthodes pour calculer le PPCM, mais nous allons expliquer une méthode simple basée sur la décomposition en facteurs premiers : on décompose chaque nombre en facteurs premiers. Puis, on prend le produit de ces facteurs en en prenant le maximum à chaque fois.

Exemple :

> *Quel est le PPCM de 72 et 96 ?*
> *La décomposition en facteurs premiers de 72 est* $2^3 \times 3^2$.
> *La décomposition en facteurs premiers de 96 est* $2^5 \times 3$.
> *Le PPCM est alors le produit des facteurs premiers dotés de la plus haute puissance :* $2^5 \times 3^2 = 288$.

Il existe par ailleurs une relation simple entre PGCD et PPCM qui permet facilement de calculer l'un si l'on connaît l'autre :

$$PPCM(a, b) = \frac{a \times b}{PGCD(a, b)}$$

Exercice :

(1.10.a) Soient deux nombres 91 et 21, quels sont leur PGCD et leur PPCM ?

1.11. Bases numériques et changements de base

Les nombres que nous utilisons généralement sont écrits au moyen d'un ensemble de dix chiffres : il s'agit du **système décimal** (base 10). Mais une infinité d'autres systèmes existent, comme le **système binaire** (base 2) utilisé en logique ou le **système hexadécimal** (base 16) utilisé en informatique. Par ailleurs, diverses civilisations ont utilisés d'autres systèmes de numération : la base 5 chez les Khmers et certains Aztèques, la base 6 dans la langue kómnzo de Nouvelle-Guinée (ou dans nos dés à lancer), la base 12 chez les Sumériens (et dans le système impérial d'unités) et la base 60 était au centre de la numération mésopotamienne.

Formellement, une base b est un entier naturel supérieur à 1 qui spécifie le nombre de symboles distincts, appelés chiffres, utilisés pour représenter les valeurs. Ces chiffres sont généralement représentés par les entiers de 0 à $b-1$. La base b permet d'exprimer tout nombre comme une somme pondérée de puissances de b avec les coefficients correspondants aux chiffres de cette base. Lorsqu'un nombre est écrit dans une base qui n'est pas décimale, la base est indiquée en indice : 11001_2 signifie que le nombre donné est binaire.

Exemples :

> *Par exemple, dans le système décimal (base* 10*), la base* b *est* 10 *et les chiffres vont de* 0 *à* 9.
> *Ainsi, le nombre* 256_{10} *s'exprime comme* $2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0$.
> *En base 4,* $321_4 = 3 \times 4^2 + 2 \times 4^1 + 1 \times 1^0$.

Les changements de base sont donc des outils importants dans de nombreux domaines. Pour convertir vers la base décimale, il suffit d'attribuer une valeur à chaque chiffre du nombre dans sa base d'origine et le multiplier cette valeur par la base élevée à une puissance équivalente au rang du nombre -1. Deux exemples seront sans doute plus parlants.

Exemple 1 :

Convertir $A3B_{16}$ *en base* 10.
Attribuer une valeur décimale à chaque chiffre : $A \rightarrow 10$ *;* $3 \rightarrow 3$ *;* $B \rightarrow 11$.
Convertir en base 10 : $10 \times 16^2 + 3 \times 16^1 + 11 \times 16^0 = 2619_{10}$

Exemple 2 :

Convertir 110110_2 *en base* 10.
Attribuer une valeur décimale à chaque chiffre : $0 \rightarrow 0$ *;* $1 \rightarrow 1$.
Convertir en base 10 : $1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 54_{10}$

La méthode la plus simple de conversion d'un nombre décimal vers une autre base b procède différemment :

1. Diviser le nombre en base 10 par la b et noter le reste ;
2. Prendre le quotient obtenu dans l'étape précédente et divisez-le à nouveau par b et noter le reste ;
3. Répéter cette étape jusqu'à ce que le quotient soit zéro ;
4. Les restes obtenus dans chaque étape, lus de bas en haut, représentent le nombre dans la base cible.

Exemple :

Convertir 2619_{10} *en base* 16.
$2619 \div 16 = 163$ *(reste* 11*) ;* $11_{10} \rightarrow B_{16}$
$163 \div 16 = 10$ *(reste* 3*) ;* $3_{10} \rightarrow 3_{16}$

$10 \div 16 = 0$ *(reste* 10*) ;* $10_{10} \rightarrow A_{16}$
Donc $2619_{10} \rightarrow A3B_{16}$

La conversion d'une base quelconque vers une autre base quelconque se fait le plus facilement en passant par la base 10.

Exercices

Réalisez les conversions suivantes et vérifiez en faisant la conversion inverse.

(1.11.a) 2211_3 vers le système décimal

(1.11.b) 798_{10}vers le système hexadécimal

1.12. Grands et très grands nombres

Dans certains cas, la notation décimale usuelle des nombres n'est guère applicable. Cela survient dans le cas des très grands ou très petits nombres lorsque de surcroît, nous ne connaissons que l'ordre de grandeur : le nombre de grains de sable sur une plage, d'étoiles dans la galaxie, de cellules dans le corps humain ou, à l'inverse, la taille d'un virus.

Le premier outil à notre disposition est alors la **notation scientifique** qui permet de représenter des nombres très grands ou très petits de manière concise et lisible. Elle permet d'exprimer ces nombres sous forme d'une **mantisse** (partie significative) et d'un **exposant** de dix (exposant), offrant ainsi une représentation compacte et pratique de représenter l'ordre de grandeur de nombres lorsque la valeur précise est inconnue ou inutile.

L'expression revêt le format général :

$$nombre = mantisse \times 10^{exposant}$$

Exemples :

$$300.000.000\,km/s = 3.10^8\,m/s$$
$$0{,}000000045 = 4{,}5 \times 10^{-8}$$

Les mathématiques nécessitent parfois des nombres bien plus grands encore. Bien que ce domaine sorte du cadre d'un précis d'algèbre, il nous semble important de l'effleurer, car il est relativement simple à comprendre et illustre comment certains concepts peuvent être mis à l'échelle afin d'en dégager de nouveaux. Repartons des notions que nous connaissons déjà afin de voir se dégager une figure que nous allons ensuite prolonger.

- Addition : $a + b = a + 1 + 1 + \cdots + 1$ avec b termes 1.
- Multiplication : $a \times b = a + a + a + \cdots + a$ avec b termes a.
- Puissance : $a^b = a \times a \times a \times \ldots \times a$ avec b facteurs a.

Nous pouvons continuer en définissant un nouvel opérateur :

- Hyperpuissance : ${}^{b}a = a^{a^{\cdots^{a}}}$ avec a exposants a.

Attention, il convient préalablement d'élever chaque puissance en commençant par la plus haute.

Exemple :

$${}^{4}2 = 2^{\left(2^{\left(2^2\right)}\right)} = 2^{\left(2^4\right)} = 2^{16} = 65536$$
$${}^{4}2 \neq 2^{2x2x2}$$

Ce concept a permis une nouvelle généralisation par Donald Knuth. Si nous notons les puissances au moyen d'une flèche, nous pouvons définir une nouvelle notation :

- Puissance : $a \uparrow b = a^b$
- Hyperpuissance : $a \uparrow\uparrow b = {}^{b}a$

Ce qui permet de construire des expressions telles que $2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$ que l'on peut aussi écrire $2 \uparrow^4 3$. Pour prendre conscience de la grandeur de ces nombres, deux exemples devraient suffire.

Exemples :

> $3 \uparrow\uparrow 3 = 7\ 625\ 597\ 484\ 897$*, soit 70 fois plus que le nombre de neurones dans un cerveau humain ;*
> $3 \uparrow^4 3 \approx 1{,}3 \times 10^{3\ 638\ 334\ 640\ 024}$*, alors que le nombre d'atomes dans notre univers est estimé à* $2{,}4 \times 10^{78}$.

Et d'autres notations existent, permettant de définir des nombres dans des ordres de grandeur bien plus incommensurables encore. Si ces nombres ne sont guère utiles dans notre expérience du monde physique, ils ont pourtant des applications en mathématiques, mais dans des domaines qui sortent heureusement du champ de ce modeste précis.

Pour donner une idée du caractère vertigineux de certains concepts mathématiques, nous évoquerons simplement le nombre de Graham G qui fut longtemps le nombre le plus élevé évoqué dans une démonstration mathématique[8]. Si l'on définit la fonction récursive suivante : $g(0) = 2 \uparrow^4 3$ et $g(n) = 3 \uparrow^{g(n-1)} 3$, alors $G = g(63)$. Ce nombre échappe à toute conceptualisation.

1.13. Zéro sans l'infini

Le nombre **zéro** est une entité fondamentale de l'algèbre, mais qui possède des propriétés parfois intrigantes qui motivent ce court chapitre. Nous avons déjà vu que certains mathématiciens l'intègrent à $\mathbb{N}$, ce que se refusent d'autres. Ceci n'est toutefois

[8] Théorème de Kruskal

qu'une question de convention, mais d'autres problèmes plus importants sont soulevés par ce petit nombre.

Nous avons vu que, dans les opérations d'addition, zéro agit comme un élément neutre, tandis que dans les opérations de multiplication, il exerce un effet particulier : toute multiplication par zéro donne zéro, un concept central dans de nombreux domaines mathématiques. Ceci implique des caractéristiques parfois surprenantes dans d'autres types d'opérations, au point que certaines d'entre elles ne sont toujours pas aujourd'hui l'objet d'un consensus et questionnent la robustesse de certains fondements de l'algèbre. Nous allons ici brièvement mettre en lumière certaines opérations où la présence de zéro doit susciter toute notre vigilance. Notons que nous adoptons ici une notation étrangement peu usitée qui désigne l'indétermination de la valeur d'une expression : $expr \downarrow$ signifie que $expr$ n'a pas de valeur déterminée.

$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{0}} \downarrow$	Contrairement à ce que pourrait nous dicter l'intuition, diviser par zéro ne donne pas l'infini[9]. Zéro étant l'élément absorbant de la multiplication dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, la division de tout nombre différent de zéro par zéro est indéfinie. Cette opération est souvent dite *interdite* ! Mais qu'en est-il alors de la division de zéro par zéro ? Car la règle précédente s'oppose à une autre : un nombre divisé par lui-même donne le résultat de 1.

[9] Cette idée repose sur le fait que la limite d'une division tend vers l'infini (∞) lorsque le diviseur positif tend vers zéro. Mais lorsque le diviseur négatif tend vers zéro, la limite tend vers $-\infty$, ce qui démontre que cette approche n'est pas pertinente.

	Elle s'oppose aussi avec le fait que diviser zéro par n'importe quel nombre donne zéro. Le premier raisonnement reste toutefois d'application : $\frac{0}{0}\downarrow$.
$\boldsymbol{a^0 = 1}$ (avec $a \neq 0$)	Utilisons la propriété $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$. Nous en déduisons que $a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$.
$\boldsymbol{0^0} = \begin{cases} \boldsymbol{1} \\ \downarrow \end{cases}$ (?)	Pouvons-nous simplement utiliser cette propriété pour l'étendre à zéro ? La plupart des mathématiciens estiment que oui, d'autant que de nombreux autres éléments d'algèbre (polynômes, séries entières) et de combinatoire convergent en ce sens. Toutefois, se fondant sur des éléments d'analyse, Cauchy et d'autres classèrent cette valeur comme indéterminée. La question ne semble donc pas totalement tranchée.
$\boldsymbol{\sqrt[0]{a}\begin{cases} \downarrow\ si\ a = 1 \\ \emptyset\ si\ a \neq 1 \end{cases}}$	Si $b = \sqrt[0]{a}$, alors $b^0 = a$, ce qui n'a de sens que si $a = 1$. et, dans ce cas, b peut être n'importe quel nombre. Une autre façon de le voir est de remarquer que $\sqrt[0]{a} = a^{\frac{1}{0}}$ et nous savons que $\frac{1}{0}\downarrow$. Si $a \neq 1$, cette opération n'a aucun sens algébrique. Et si nous acceptons l'hypothèse ci-dessus que $0^0 = 1$, $\sqrt[0]{0}$ n'a guère plus de sens.
$\boldsymbol{0! = 1}$	La fonction factorielle est définie récursivement par $n! = n.(n-1)!$.

	Autrement dit, $n = \frac{n!}{(n-1)!}$. Pour $n = 1$, nous avons donc $1 = \frac{1}{0!}$, ce qui implique bien que $0! = 1$.

Bien que plus problématique encore que zéro, l'**infini** (∞) ne sera pas abordé ici pour deux raisons. La première est qu'il ressort plus de l'analyse que de l'algèbre[10]. La seconde, plus fondamentale, est que, bien qu'il dispose de définitions rigoureuses qui en font une entité mathématique précise, l'infini n'est pas un nombre, car notamment :

- *Il n'est pas qualifiable* : les nombres entiers, rationnels et réels peuvent être quantifiés de manière spécifique ; par exemple, il existe une quantité déterminée d'entiers entre 1 et 10. En revanche, l'infini ne peut pas être quantifié comme un nombre spécifique.
- *Il n'a pas de représentation unique* : il existe différents types d'infinis, chacun avec ses propriétés distinctes. Bien que tous deux infinis, le cardinal de $\mathbb{R}$ est supérieur à celui de $\mathbb{N}$.
- *Les opérateurs usuels ne lui sont pas applicables* : l'addition, la soustraction, la multiplication ou la division ne s'appliquent pas de manière directe à l'infini. Par exemple, $\infty + 1$ n'a pas de signification cohérente dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

10 Entre autres parce que la division par zéro ne mène pas à l'infini mais à une indétermination.

2. LES POLYNÔMES

Les polynômes sont parmi les objets les plus simples et les plus obstinément présents de l'algèbre. Ils sont constitués de variables et de coefficients reliés par des opérations élémentaires : addition, soustraction et multiplication. Rien de plus, rien de moins. Cette apparente simplicité explique en grande partie leur succès durable.

Un polynôme peut être considéré comme une **expression algébrique**, mais dès que l'on s'intéresse à la valeur qu'il prend pour chaque valeur de la variable[11], il devient une **fonction polynomiale**. On passe alors naturellement de l'algèbre au langage des fonctions, des graphes et des variations. Cette double lecture – expression formelle d'un côté, fonction de l'autre – fait toute la richesse des polynômes et justifie la place centrale qu'ils occupent dans ce précis[12].

Historiquement, les polynômes apparaissent très tôt, notamment dans la résolution de problèmes géométriques et astronomiques. Ils ont longtemps été l'outil privilégié pour modéliser des phénomènes concrets, avant même que l'analyse moderne n'existe. Aujourd'hui encore, ils restent omniprésents : en physique, en informatique, en économie, ou simplement pour approximer des fonctions plus complexes lorsque celles-ci se montrent récalcitrantes.

---

[11] En algèbre, une **variable** est une quantité inconnue dans une expression mathématique ou une équation. Les variables sont généralement notées par des lettres, souvent les dernières lettres de l'alphabet comme x, y ou z. Leur utilisation permet de généraliser les expressions, facilitant ainsi la résolution de problèmes mathématiques.

[12] Dans ce chapitre, nous utiliserons souvent le mot *polynôme* pour désigner les deux, lorsque le contexte est clair.

Ce chapitre a pour objectif de familiariser le lecteur avec ces objets fondamentaux, d'en comprendre la structure, le vocabulaire et les premières propriétés. Les polynômes serviront ensuite de fil conducteur à de nombreux chapitres : mieux vaut donc apprendre à les reconnaître, à les manipuler et, surtout, à ne pas les sous-estimer.

Les polynômes peuvent être uni- ou multivariés selon qu'ils disposent d'une ou de plusieurs variables. Les polynômes univariés se présentent sous la forme générale :

$$\boxed{P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

Dans cette expression, $P(x)$ est le polynôme, x est la variable, a_i sont les coefficients et n est le degré du polynôme, c'est-à-dire la puissance la plus élevée appliquée à la variable.

Exemples :

$$x + 7$$
$$3x^3 - 2xy + x^2 - 2$$
$$a + b$$
$$5abcdef + 16x - 3$$

Remarque : un **binôme** et un **trinôme** sont respectivement un polynôme à 2 et à 3 termes. Si l'expression est constituée d'un terme unique, il s'agit d'un **monôme**.

2.1. Simplification de polynômes

Simplifier un polynôme est l'opération la plus fréquente. Elle consiste à regrouper les termes au maximum : les *x* avec les *x*, les x^2

avec les x^2, les y avec les y, les nombres avec les nombres… bref, rassembler tout ce qui peut licitement être additionné ou soustrait.

Exemple :

$$x + (2 - 5) + 3(5x - 2x + 1) + 3^2 - 1$$

1. Traiter le contenu des parenthèses.

$$x + (-3) + 3(3x + 1) + 3^2 - 1$$

2. Traiter les exposants et les multiplications.

$$x + (-3) + 3(3x + 1) + 9 - 1$$

3. Supprimer les parenthèses précédées d'un nombre.

$$x - 3 + 9x + 3 + 9 - 1$$

4. Rassembler les termes de même nature.

$$x + 9x - 3 + 3 + 9 - 1$$

5. Procéder aux additions et soustractions.

$$10x + 8$$

Exercices :

Résolvez les équations polynomiales suivantes (et vérifiez en substituant les inconnues de l'équation de départ par les solutions trouvées).

(2.1.a) $7x + 8 = -18$

(2.1.b) $x^2 . x = 27$

(2.1.c) $9x = 8x - 6$

(2.1.d) $8n - 4 = -2n + 6$

(2.1.e) $7a - 3 = 13a + 7$

(2.1.f) $\frac{5}{4}x + 6 = \frac{1}{4}x - 2$

2.2. Opérations sur les polynômes

L'**évaluation d'un polynôme** consiste simplement à remplacer ses variables par les valeurs données[13].

Exemple :

Que vaut $P(x,y) = 3x + xy - 2y + 1$ *lorsque* $x = 2$ *et* $y = -1$ *?*

$$P(x,y) = 3x + xy - 2y + 1$$
$$P(2,-1) = 3(2) + (2 \times -1) - 2(-1) + 1$$
$$P(2,-1) = 6 - 2 + 2 + 1 = 7$$

L'**addition et la soustraction de polynômes** s'effectuent en combinant les termes analogues.

Exemple :

$$P = x^2 + 3x^2y - 5y^2 + y - 4$$
$$Q = x^3 - x^2 + 2y^2 + y + 3$$
$$P - Q = -x^3 + 2x^2 + 3x^2y - 7y^2 - 7$$

La **multiplication de polynômes** implique la distribution des termes d'un polynôme dans l'autre et la simplification en utilisant les règles d'exponentiation.

$$\boxed{(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd}$$

[13] Évaluer un polynôme n'est pas le résoudre : *évaluer* consiste à calculer une valeur ; *résoudre* consiste à trouver pour quelles valeurs le polynôme est nul.

Exemple :

$$\begin{aligned}(3x-2)(x+5) &= 3x^2+15x-2x-10\\ &= 3x^2+13x-10\end{aligned}$$

Si les additions, soustractions et multiplications de polynômes ne posent guère de problème, **diviser un polynôme** par un autre requiert un examen plus poussé, bien que cette opération soit très comparable à la méthode générale de division d'un grand nombre entier par un autre :

1. Réordonner de façon décroissante les termes du dividende et du diviseur selon le degré de leurs termes ;
2. Diviser le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur ;
3. Écrire le résultat sous le diviseur.
4. Le multiplier par tous les termes du diviseur ;
5. Soustraire ce résultat du dividende ;
6. Descendre les termes restant du dividende à côté du résultat de la soustraction.
7. Répéter 2) à 6) jusqu'à ce que le degré du dividende soit plus petit que celui du diviseur ;
8. Spécifier le reste éventuel.

Exemple :

Diviser $6x^4-8x^3-2x^2+10x+13$ *par* $x-2$ *:*

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & -8x^3 & -2x^2 & +10x & +13 & x-2 \\
\cline{6-6}
-6x^4 & +12x^3 & & & & 6x^3+4x^2+6x+22 \\
\cline{1-2}
 & 4x^3 & -2x^2 & & & \\
 & -4x^3 & +8x^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & & 6x^2 & +10x & & \\
 & & -6x^2 & +12x & & \\
\cline{3-4}
 & & & 22x & +13 & \\
 & & & -22x & +44 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 57 &
\end{array}
$$

Le résultat de la division est donc $6x^3 + 4x^2 + 6x + 22$ (reste 57), *ce qui peut aussi s'écrire :*

$$\frac{6x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 10x + 13}{x - 2} = 6x^3 + 4x^2 + 6x + 22 + \frac{57}{x - 2}$$

Le reste est nul *ssi* le diviseur est un facteur du polynôme.

Exercices :

Procédez aux opérations suivantes (et vérifiez en procédant à l'opération inverse).

(2.2.a) $(x^2 + ab - x + 5) - (ax - 2x^2 + x - 3)$

(2.2.b) $(abc + ac + a^3 + 1) + (-abc - ac - b^3 - 1)$

(2.2.c) $(3a - 2)(a + 1)$

(2.2.d) $(2 + 5)(x + y)$

(2.2.e) $(-x - y)(-y - x)$

(2.2.f) $(2x^2 + 2x^3y + 4x^2y^2 + 4xy) \div (x + 2y)$

(2.2.g) $(x^3 - 6x^2 - x - 30) \div (x + 5)$

(2.2.h) $(6x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 2x - 2) \div (x^2 + 2)$

2.3. Trois identités remarquables

Ceci nous permet de découvrir quelques cas très spéciaux, comme les carrés de binômes :

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Pour un binôme négatif, le résultat est comparable :

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$
$$(a-b)^2 = a^2 - ab - ba + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Et que se passe-t-il si l'on multiplie un binôme positif par le binôme identique, mais négatif ?

$$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ba - b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Que l'on écrit le plus souvent :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Ces trois identités sont très importantes ; il faut absolument les connaître. Elles jouent un rôle fondamental dans la simplification des expressions, mais aussi dans de nombreux autres cas.

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Parfois il est préférable de les utiliser de gauche à droite, parfois de droite à gauche, tout dépend du résultat recherché.

Exemple :

$$36x^4y^2 - 9z^6$$
$$(6x^2y - 3z^3)(6x^2y + 3z^3)$$

Nous verrons ultérieurement comment aller plus loin dans cet exemple.

Exercices :

Trouvez l'égalité découlant de l'identité remarquable (et vérifiez en lui opérant le traitement inverse).

(1.3.a) $(4x^2 - y^2)$

(1.3.b) $(2x - y)^2$

(1.3.c) $4 - 4x + x^2$

(1.3.d) $4xy + 4y^2 + x^2$

(1.3.e) $(2x - 1)(2x + 1)$

(1.3.f) $(y + y + 2)(2y - 2)$

2.4. Théorème de d'Alembert-Gauss

Le **théorème de d'Alembert-Gauss**, souvent appelé simplement le théorème de d'Alembert, est un résultat fondamental dans la théorie des équations polynomiales. Il affirme que **tout polynôme non constant**[14] **à coefficients complexes possède exactement** n **racines dans le corps des nombres complexes** $\mathbb{C}$, en comptant les multiplicités. Cela signifie que, pour un polynôme $P(x)$ de degré n, il existe n solutions (réelles ou complexes) à l'équation $P(x) = 0$.

Lorsqu'un polynôme possède des coefficients rationnels (ou plus spécifiquement, entiers), il est possible d'identifier ses racines rationnelles potentielles grâce à un outil appelé **théorème des**

[14] Un polynôme non constant est simplement différent d'une constante unique, c'est-à-dire au moins de degré 1.

racines rationnelles. Ce théorème donne une méthode pratique pour tester si un polynôme admet des racines rationnelles et, le cas échéant, lesquelles. Il ne garantit pas l'existence de racines rationnelles ; il fournit seulement une liste finie de candidats à tester.

Si r est racine de $P(x)$ à coefficients entiers, alors r peut s'écrire sous la forme $r = \frac{p}{q}$ où p divise le terme constant de $P(x)$ et q divise le coefficient du terme de plus haut degré de $P(x)$.

En utilisant ce théorème, on peut déterminer les différentes formes possibles des racines rationnelles d'un polynôme et les tester pour trouver les racines entières possibles.

Exemple :

Soit le polynôme $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 4$.
Posons $n = 4$*, soit le degré du polynôme dont nous remarquons qu'il est une puissance de 2 :* $n = 2^2$.
Prenons l'équation $2x^4 = 0$*. Sa seule racine réelle est* $x = 0$.
Pour $x = 0$*,* $P(0) = 2.0^4 - 5.0^3 + 3.0^2 + 4.0 - 4 = -4$*. Donc* 0 *n'est pas une racine de* $P(x)$.
Selon le théorème de d'Alembert-Gauss, toute racine rationnelle r *de* $P(x)$ *doit être de la forme* $\pm\frac{p}{q}$ *où* p *divise* -4 *et* q *divise* 2.
Les diviseurs de -4 *sont :* $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ *et les diviseurs de* 2 *sont :* $\{\pm 1, \pm 2\}$*, ce qui nous offre les racines rationnelles possibles suivantes :* $x = \left\{\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}\right\}$.
Cependant, en vérifiant ces valeurs dans $P(x)$*, on constate qu'aucune d'entre elles est une racine, ce qui démontre que* $P(x)$ *n'a pas de racine rationnelle.*

Cette méthode de test des racines rationnelles est très utile pour débuter la résolution de polynômes à coefficients entiers. Une fois une racine identifiée, le polynôme peut être réduit, et les autres racines (réelles ou complexes) peuvent être trouvées par des méthodes complémentaires comme la formule quadratique ou l'approximation numérique.

3. ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS LINÉAIRES

Une **équation** est une relation d'égalité entre deux expressions. La résoudre consiste à déterminer les valeurs pour lesquelles cette égalité est vérifiée, c'est-à-dire les situations où deux écritures différentes représentent une même quantité.

La résolution repose sur un principe fondamental : *le principe d'égalité*. Une équation reste valide si l'on effectue la même opération sur chacun de ses deux membres, par exemple en leur ajoutant une même quantité ou en les multipliant par un même nombre non nul. Cette règle simple constitue l'outil central de tout raisonnement algébrique.

Les équations sont utilisées depuis l'Antiquité pour résoudre des problèmes concrets, bien avant l'apparition du formalisme moderne. Aujourd'hui encore, elles permettent de modéliser et d'analyser des situations très diverses, de la physique à la finance ou à la biologie. Ce chapitre introduira les techniques élémentaires de résolution, qui peuvent paraître mécaniques, mais dont la maîtrise est indispensable : transformer une égalité sans la déformer est une compétence aussi essentielle que délicate.

Exemple :

$$x - 2 = 4$$

Pour connaître la valeur de x, nous pouvons ajouter 2 à chaque membre :

$$x - 2 + 2 = 4 + 2$$

En simplifiant, nous obtenons $x = 6$, *la réponse !*

Le principe est aussi d'application avec les multiplications ou les divisions *en prenant soin d'éviter le zéro*[15].

Exemple :

$$2x = 6$$

Pour connaître la valeur de x, je peux diviser les deux membres par 2 : $\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$

En simplifiant, j'obtiens $x = 3$

On peut bien sûr combiner les deux techniques :

$$3x + 1 = 7 \Rightarrow 3x + 1 - 1 = 7 - 1 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \Rightarrow x = 2$$

Et on peut appliquer bien sûr appliquer les mêmes principes aux inconnues :

$$2x = x + 5 \;\Rightarrow\; 2x - x = x + 5 - x \;\Rightarrow\; x = 5$$

Rappel : comme il est *interdit* de diviser par zéro, certaines valeurs sont proscrites et il importe de les désigner explicitement.

Exemple :

$$x(x + 3) = 5x$$

$$\frac{x(x + 3)}{x} = \frac{5x}{x} \; [avec\ x \neq 0]$$

$$x + 3 = 5$$

$$x + 3 - 3 = 5 - 3$$

$$x = 2$$

[Différente de 0, la valeur est donc autorisée !]

15 Une valeur est dite interdite si elle annule un dénominateur ou rend une expression non définie. Ainsi, diviser par zéro est illicite ; multiplier par zéro ne mène à rien d'utile.

3.1. Équations linéaires

Une **équation linéaire** désigne une équation du premier degré à une inconnue.

Le **degré d'une équation** est l'exposant le plus élevé de ses inconnues. Une équation du premier degré à une inconnue représente donc le type le plus simple d'équations.

Sa résolution consiste à la simplifier pour arriver à la forme $x = a$ où a représente la valeur de x. Divers chemins permettent généralement d'y arriver, mais une stratégie efficace est de suivre les étapes suivantes.

Exemple :

Soit l'équation $-6(x+3) = 24 + 2x$
1. Supprimer la parenthèse : $-6x - 18 = 24 + 2x$
2. Placer les « x » à gauche par le principe d'égalité : $-6x - 18 - 2x = 24$
3. Placer les nombres à droite avec le même principe : $-6x - 2x = 24 + 18$
4. Rassembler les termes : $-8x = 42$
5. Diviser les deux membres par le principe d'égalité (par -8) :
$x = -\frac{42}{8} = -\frac{21}{4}$
6. Vérifier en injectant la valeur dans l'équation de départ :
$-6\left(-\frac{21}{4} + 3\right) = 24 + 2\left(-\frac{21}{4}\right)$
Il est important de noter que certaines équations n'ont pas de solution (p. ex. $x + 2 = x + 1$*) et que d'autres équations admettent une infinité de solutions (p. ex.* $x = x$*).*

Exercices :

Résolvez les équations suivantes pour x (et vérifiez au moyen d'une valeur quelconque).

(3.1.a) $\quad -(x+9) = 8$

(3.1.b) $5(x-3)+5=-10$

(3.1.c) $\frac{2}{3}(6x-3)=8-x$

(3.1.d) $4(x-1)-2=5(2x+3)+6$

Ceci nous offre la possibilité de revenir un peu en arrière. Si la transformation d'une fraction en nombre décimal est très simple, il existe une méthode tout aussi simple pour déterminer la fraction d'un nombre décimal périodique. Les équations linéaires vont considérablement nous aider.

Deux exemples vont nous permettre d'en comprendre le mécanisme…

Exemple 1 :

Comment écrire le nombre $0{,}77777\ldots$ *sous forme de fraction ?*
Posons $x=0{,}77777\ldots$
Nous en déduisons que $10x=7{,}77777\ldots$
et donc que $10x=7+0{,}77777\ldots$
Autrement dit : $10x=7+x$ *que nous pouvons résoudre classiquement pour trouver* $9x=7$*, donc* $x=\frac{7}{9}$.

Si la périodicité est de n chiffres, nous procèderons simplement à une multiplication initiale par 10^n.

Exemple 2 :

Soit le nombre $x=0{,}128128128\ldots$
La périodicité étant de 3 chiffres, nous multiplions le nombre par 1000 :

$$1000x=126{,}126126\ldots$$
$$1000x=126+x$$
$$999x=126$$

$$x = \frac{126}{999} = \frac{14}{111}$$

3.2. Inéquations linéaires

Une **inéquation** est une expression dont les deux membres ne sont pas séparés par le signe =, mais par un comparateur : ≤, <, ≥ ou >. Les opérations valables pour les équations le restent généralement pour les inéquations :

$$a < b \Rightarrow (a + c) < (b + c)$$
$$a < b \Rightarrow (a - c) < (b - c)$$

Mais attention, le fait de multiplier les deux côtés de l'inégalité par un nombre négatif entraîne un changement de signe de chacun des membres. Dès lors, si on multiplie (ou divise) par un nombre négatif, l'inégalité change de sens. Il suffit pour s'en convaincre de considérer l'inéquation $4 > 3$ qui, si l'on multiplie chacun de ses membres par -1 devient $-4 < -3$.

Lorsqu'on multiplie ou divise une inéquation par un nombre négatif, le sens de l'inégalité est inversé.

Exemple :

$$a < b \Rightarrow 5a < 5b$$
$$a < b \Rightarrow -5a > -5b$$
$$a < b \Rightarrow \frac{a}{5} < \frac{b}{5}$$
$$a < b \Rightarrow \frac{a}{-5} > \frac{b}{-5}$$

Exercices :

Déterminez le domaine de l'inconnue (et vérifiez graphiquement).

(3.2.a) $x + 5 > 9$
(3.2.b) $p - 3/4 > 1/6$
(3.2.c) $-20 < \frac{4}{5}u$
(3.2.d) $8x + 3(x - 12) > 7x - 28$

3.3. Systèmes d'équations linéaires

Des équations partageant les mêmes inconnues constituent un **système d'équations** que l'on désigne comme tel en l'unissant d'une accolade ouvrante.

Nous allons dans un premier temps examiner le cas d'un système de deux équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

Comme pour une équation à une inconnue, il convient avant tout d'en simplifier les membres.

Ensuite, deux nouvelles méthodes sont disponibles, également valables. Généralement toutefois, l'une d'elles sera plus rapide que l'autre. Un examen préalable sera donc indispensable afin de suivre le chemin le moins escarpé.

La méthode conceptuellement la plus simple pour résoudre un système d'équations est la **résolution par substitution**. Cette méthode consiste à résoudre l'une des équations du système pour une variable en fonction des autres variables, puis à substituer cette expression dans les autres équations. Elle comporte quatre étapes :

1. Exprimer une variable en fonction de l'autre ;
2. Substituer ensuite dans l'une des équations de départ cette variable par sa substitution afin d'obtenir une équation à variable unique ;
3. Résoudre cette équation ;

4. Injecter la valeur dans l'une des équations de départ et déterminer la valeur de la seconde variable.

Exemple :

$$\begin{cases} x + y = 6\ (I) \\ y = 2x - 1\ (II) \end{cases}$$

Exprimer y en fonction de x dans I : $y = 6 - x$

Substituer y par cette expression dans II : $6 - x = 2x - 1$

Résoudre classiquement cette équation à une inconnue :

$-x - 2x = -1 - 6 \Rightarrow -3x = -7 \Rightarrow x = 7/3$

Injecter cette valeur dans l'équation I p. ex. : $7/3 + y = 6$

Résoudre classiquement cette équation à une inconnue : $y = 6 - 7/3 \Rightarrow y = 11/3$

Solutions : $x = 7/3\ ; y = 11/3$

Lorsqu'on résout un système d'équations linéaires, trois situations distinctes peuvent se présenter :

- Le système admet une solution unique ;
- Le système n'admet aucune solution ;
- Le système admet une infinité de solutions.

Exercices :

Déterminez les inconnues (et vérifiez en substituant les inconnues de l'équation de départ par les solutions trouvées).

(3.3.a) $\begin{cases} -2x + y = -11 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$

(3.3.b) $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 4x + y = 18 \end{cases}$

(3.3.c) $\begin{cases} x + y = -1 \\ y = x + 5 \end{cases}$

(3.3.d) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x + 4y = -10 \end{cases}$

Une deuxième méthode permet parfois de faire gagner beaucoup de temps, surtout si le système d'équations contient plus de deux équations, il s'agit de la **résolution par combinaison**. Cette technique consiste à additionner ou soustraire les équations du système de manière à éliminer une variable, puis à résoudre le système résultant. Elle repose sur le principe d'égalité : une équation reste valide si l'on additionne ou multiplie ses deux membres de la même quantité.

En outre additionner (ou soustraire) chacun les termes d'une équation par ceux de l'autre équation du système mène à une équation valide :

$$\begin{cases} 3+5=1+7 \\ 8-4=2+2 \end{cases}$$

Si nous additionnons les deux équations, nous obtenons :

$$3+5+8-4=1+7+2+2 \;\Rightarrow 12=12$$

Parfois, cette méthode permet de supprimer facilement un terme et est nettement plus rapide que la substitution.

Exemple :

$$\begin{cases} 3x-4y=6 \\ 7x+4y=24 \end{cases}$$

Nous voyons qu'en additionnant l'une de l'autre, les termes en y vont s'annuler :

$$3x-4y+7x+4y=6+24$$
$$10x=30$$
$$x=3$$

Nous pouvons donc substituer cette valeur dans la première équation, p. ex. : $3\times 3-4y=6 \;\Rightarrow 9-4y=6 \;\Rightarrow$ $-4y=6-9 \;\Rightarrow y=3/4$

Solutions : $x=3$; $y=3/4$

Mais parfois, la simple addition ne suffit pas et il faut passer par le principe d'égalité pour obtenir une élimination.

Exemple :

$$\begin{cases} x + 4y = 2 \ (I) \\ 2x + 5y = -2 \ (II) \end{cases}$$

En multipliant I par -2, nous pourrons procéder à une élimination des x :

$$\begin{cases} -2x - 8y = -4 \\ 2x + 5y = -2 \end{cases}$$

En additionnant les deux équations, nous obtenons $-3y = -6 \Rightarrow y = 2$

Injections cette valeur dans II p. ex. : $2x + 10 = -2 \Rightarrow x = -6$

Solutions : $x = -6$; $y = 2$

Si la résolution par substitution est toujours possible, elle devient vite très pénalisante pour les systèmes d'équations à plus de deux inconnues. Sauf exception, il convient de lui préférer la résolution par combinaison en prenant soin de bien examiner préalablement le type de combinaison menant à la résolution la plus rapide. L'objectif est de *triangulariser* le système de telle sorte que la première équation contienne trois inconnues, la deuxième équation deux inconnues et la troisième une inconnue.

Exemple :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 3x - y + z = 4 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Multiplier la dernière ligne par 3 :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 3x - y + z = 4 \\ 3x + 3y - 3z = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Ceci nous permet de remplacer la ligne (3) par la soustraction de (2)-(3) :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 3x - y + z = 4 \\ -4y + 4z = 4 \end{cases} \qquad (3)$$

Multiplier (1) par 3 et (2) par deux afin de pouvoir ensuite éliminer les x :

$$\begin{cases} 6x + 3y + 3z = 21 \\ 6x - 2y + 2z = 8 \\ -4y + 4z = 4 \end{cases}$$

Éliminer x en remplaçant la ligne (2) par la soustraction (1)-(2) :

$$\begin{cases} 6x + 3y + 3z = 21 \\ 5y + z = 13 \\ -4y + 4z = 4 \end{cases}$$

Les deux dernières lignes forment un système de deux équations du premier degré à deux inconnues. Sa résolution permettra d'obtenir $z = 3$ et $y = 2$. Ces valeurs, injectées dans la première équation, nous donneront la valeur de $x = 1$.

Exercices :

Déterminez les inconnues (et vérifiez au moyen d'une valeur quelconque).

(3.3.e) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$

(3.3.f) $\begin{cases} 4x + y = -5 \\ -2x - 2y = -2 \end{cases}$

(3.3.g) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x - 7y + 3z = -4 \\ 3x + y + z = 12 \end{cases}$

D'autres techniques de résolution de systèmes d'équations linéaires existent. Nous présenterons ultérieurement la méthode de Cramer et celle de Gauss qui font toutes deux appel aux matrices.

3.4. Interprétation géométrique et domaine de solutions

Les équations et inéquations linéaires peuvent être étudiées de manière purement algébrique. Toutefois, il est souvent utile de leur donner une interprétation géométrique, qui permet de mieux comprendre la nature et le nombre des solutions.

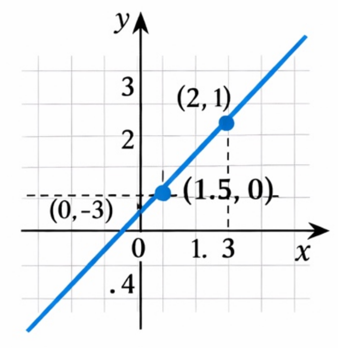
3.4.1. Équation linéaire à deux inconnues

Une équation linéaire à deux inconnues, par exemple

$$ax + by = c$$

ne décrit pas une valeur unique de x et de y, mais une infinité de couples (x, y) qui vérifient l'égalité.

Chaque couple solution peut être représenté par un point du plan. L'ensemble de ces points forme une droite.



Ainsi :

- chaque équation linéaire à deux inconnues correspond à une droite ;
- résoudre une équation revient à décrire l'ensemble des points de cette droite.

3.4.2. Systèmes de deux équations linéaires

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues correspond donc à deux droites dans le plan.

La résolution algébrique du système revient à déterminer la position relative de ces deux droites :

- Une solution unique
  - Les droites se coupent en un point unique ;
  - Ce point correspond à l'unique couple solution du système.
- Aucune solution
  - Les droites sont parallèles et distinctes ;
  - Elles n'ont aucun point commun.
- Une infinité de solutions
  - Les droites sont confondues ;
  - Tous leurs points sont solutions du système.

Cette interprétation explique naturellement les trois cas rencontrés lors de la résolution algébrique.

3.4.3. Inéquations et domaine de solutions

Contrairement à une équation, une inéquation ne décrit pas une égalité stricte, mais une condition.

Exemple :

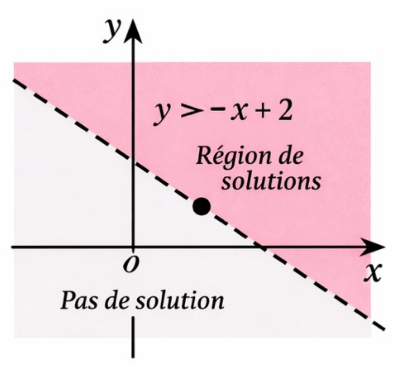
$$x + y > 3$$

L'ensemble des couples (x, y) qui vérifient cette inéquation forme une région du plan, appelée domaine de solutions.

La droite associée à l'équation $x + y = 3$ constitue la frontière du domaine :

- elle est incluse si l'inégalité est large (≤ ou ≥) ;
- elle est exclue si l'inégalité est stricte (< ou >).

Les solutions de l'inéquation sont tous les points situés d'un même côté de cette droite.



3.4.4. Cas des inéquations à une inconnue

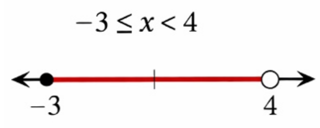
Lorsqu'une inéquation ne comporte qu'une seule inconnue, son domaine de solutions se représente sur une droite graduée.

Exemple :

$$x \geq 2$$

Les solutions sont tous les nombres réels supérieurs ou égaux à 2. On les représente par :

- un point plein en 2 ;
- une demi-droite orientée vers la droite.



3.4.5. Rôle de l'interprétation géométrique

L'interprétation géométrique ne remplace pas la résolution algébrique. Elle permet de vérifier la cohérence d'un résultat, aide à anticiper le nombre de solutions et facilite la compréhension des domaines de solutions.

Elle constitue un pont essentiel entre l'algèbre et la géométrie, qui sera approfondi dans des chapitres ultérieurs.

4. FACTORISATION

La **factorisation** consiste à transformer une expression polynomiale écrite comme une *somme* de termes en un *produit* de facteurs. Autrement dit, on passe d'une écriture additive à une écriture multiplicative, sans changer la valeur de l'expression.

Cette technique, en apparence purement formelle, se révèle particulièrement puissante. Elle permet de simplifier des expressions, de mettre en évidence leur structure, et surtout de résoudre plus aisément certaines équations. Les équations les plus rebelles deviennent parfois étonnamment dociles dès qu'elles se retrouvent écrites sous forme factorisée.

Historiquement, la factorisation est au cœur de l'algèbre depuis la Renaissance, époque où la résolution des équations polynomiales représentait un véritable défi intellectuel. Aujourd'hui encore, qu'il s'agisse d'analyser une fonction, de programmer un algorithme ou de modéliser un phénomène, savoir reconnaître et extraire un facteur reste une compétence essentielle.

Le théorème de factorisation stipule que tout polynôme de degré n peut être factorisé en un produit de n facteurs, y compris les racines (réelles et complexes) du polynôme.

Ceci se démontre assez simplement.

1. Soit un polynôme $P(x)$ de degré n. $P(x) = 0$ qui s'annule pour n valeurs de x : $x_1, x_2, \dots, x_n$ (les **racines** du polynôme).
2. $P(x)$ étant de degré n, le coefficient principal en est a_n qui doit aussi être coefficient principal du produit de facteurs.

3. $P(x)$ peut dès lors s'exprimer sous la forme $P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$

Exemple :

$$x^2 + xy + 2x + 2y \Rightarrow (x + y)(x + 2)$$

À moins d'être rompu à ce genre d'exercice, cette transformation d'une somme en un produit ne va pas de soi. Elle nécessite le recours à certains outils dont les premiers sont, fort heureusement, assez simples…

4.1. Mise en évidence

Si *tous* les termes d'un polynôme ont un facteur commun, il est possible de les diviser par ce facteur, puis de s'en servir pour les multiplier collectivement ; c'est ce que l'on appelle **la mise en évidence** de ce facteur commun, soit l'opération inverse de la distribution multiplicative.

C'est en outre une technique assez simple :

1. Trouver les PGCD de tous les termes ;
2. Trouver le plus petit exposant de la variable commune ;
3. Multiplier 1) et 2) pour obtenir le plus grand facteur commun ;
4. Diviser chaque terme par ce facteur ;
5. Multiplier le polynôme résultant par le facteur trouvé.

Exemple :

$$30x^6y^3z + 15x^4y^4z^4 + 20xy^2$$

PGCD (30, 15, 20) = 5

Les variables x et y sont les variables communes. Le plus petit exposant de x est 1 ; le plus petit exposant de y est 2.
Le plus grand facteur commun du polynôme est donc $5xy^2$ *que nous allons mettre en évidence.*
Après division de chaque terme par ce facteur, nous obtenons :
$(5xy^2)(6x^5yz + 3x^3y^2z^4 + 4)$
Soit l'expression factorisée.

Attention, quand il n'y a pas de plus grand facteur commun, la mise en évidence peut être appliquée sur des *parties* du polynôme après regroupement…

Exemple :

$$-5xy + x - 20y + 4$$
$$x(-5y + 1) + 4(-5y + 1)$$

Nous trouvons à nouveau un facteur commun entre les deux termes de l'addition. Mettons-le en évidence pour terminer le travail :

$$(-5y + 1)(x + 4)$$

Exercices :

Factorisez les expressions suivantes (et vérifiez en redistribuant les facteurs trouvés).

(4.1.a) $4x + 12$
(4.1.b) $4y^2 + 24y + 28$
(4.1.c) $5x^3 - 25x^2$
(4.1.d) $21x^3 - 9x^2 + 15x$
(4.1.e) $9xy^2 + 6x^2y^2 - 21y^3$
(4.1.f) $xy + 8y + 3x + 24$
(4.1.g) $ab + 7b + 8a + 56$
(4.1.h) $x^2 + 3x - 2x - 6$

4.2. Le produit nul

Il n'y a qu'une seule façon pour que le produit de deux nombres soit nul : il faut que l'un de ces deux nombres au moins soit nul. Autrement dit :

$$ab = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0$$

Ce principe confère à lui seul une importance cardinale à la factorisation.

Exemple :

$$(x-3)(x+5) = 0$$

Implique que l'équation est correcte si $(x-3) = 0$ *ou si* $(x+5) = 0$.

Les deux solutions sont donc $x = 3$ *et* $x = -5$.

Résoudre une équation polynomiale factorisée consiste à annuler successivement chacun des facteurs.

4.3. Une identité remarquable bien connue

L'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ nous offre un mode de factorisation que nous avons déjà rencontré plus haut. Nous pouvons dès lors reprendre notre exemple et le pousser plus avant.

Exemple :

$$36x^4y^2 - 9z^6$$

$$(6x^2y - 3z^3)(6x^2y + 3z^3)$$

Mais on peut encore mettre le facteur 3 en évidence pour chaque parenthèse :

$$3(2x^2y - z^3).3(2x^2y + z^3)$$

Et finalement les regrouper :

$$9(2x^2y - z^3)(2x^2y + z^3)$$

4.4. Le « produit-somme »

La technique du **produit-somme** permet de factoriser un trinôme du type $ax^2 + bx + c$. Elle consiste à chercher deux nombres m et n dont le produit égale ac et la somme égale *b*. L'expression sera alors factorisable en $(x + m)(x + n)$.

Si les nombres sont entiers, la méthode la plus simple est souvent de tâtonner… et admettre que ce n'est pas toujours possible[16]. Sinon, il vaut mieux passer à la méthode suivante.

Exemple :

$$x^2 + 4x - 32$$

Chercher m et n tels que $mn = 1 \times -32$ *et* $m + n = 4$.

$$-32 = -1 \times 32, mais - 1 + 32 \neq 4$$
$$-32 = 1 \times -32, mais\ 1 - 32 \neq 4$$
$$-32 = -2 \times 16, mais - 2 + 16 \neq 4$$
$$-32 = 2 \times -16, mais\ 2 - 16 \neq 4$$
$$-32 = -4 \times 8, et - 4 + 8 = 4$$

m et n sont donc égaux à -4 et 8, donc

$$x^2 + 4x - 32 = (x - 4)(x + 8)$$

Exercices :

Factorisez les expressions suivantes (et vérifiez en développant).

(4.3.a) $6x^2 + 16x + 8$

(4.3.b) $x^2 + 5x + 6$

(4.3.c) $x^2 + 7x + 12$

---

16 Cette méthode ne fonctionne que lorsque le trinôme est factorisable sur les entiers ou les rationnels.

(4.3.d) $y^2 + 8y + 15$

4.5. La substitution de variable

Lorsque les puissances de la variable suivent un motif régulier, une substitution permet de ramener le problème à un cas déjà connu.

Exemple :

$$x^4 - 4x^2 + 3$$

Posons $X = x^2$.

Le polynôme devient :

$$X^2 - 4X + 3$$

La méthode du produit-somme nous permet de le factoriser :

$$(X-1)(X-3)$$

Il reste à revenir à la variable d'origine :

$$(x^2-1)(x^2-3)$$

Exercices :

Factorisez les expressions suivantes (et vérifiez en développant).

(4.4.a) $x^4 - 4x^2 + 4$

(4.4.b) $x^6 - 2x^4 + x^2$

(4.4.c) $x^5 - x^3 - x^2 + 1$

4.6. Mise en évidence multiple

Considérons le polynôme suivant :

$$P(x) = 4x^3 + 6x^2 - 8x - 12$$

Nous regroupons les termes par paires pour faciliter une factorisation partielle :

$$P(x) = (4x^3 + 6x^2) - (8x + 12)$$
$$P(x) = 2x^2(2x+3) - 4(2x+3)$$

Ceci permet une nouvelle mise en évidence :

$$P(x) = (2x^2 - 4)(2x + 3)$$

La première parenthèse peut à son tour produire une mise en évidence :

$$P(x) = 2(x^2 - 2)(2x + 3)$$

Enfin, si l'on étend notre réflexion aux nombres réels $\mathbb{R}$, nous pouvons considérer 2 comme un carré et, dès lors, $x^2 - 2$ est une identité remarquable qui peut être développée :

$$P(x) = 2\left(x - \sqrt{2}\right)(x + \sqrt{2})(2x + 3)$$

4.7. Méthode de Hörner

La **méthode de Hörner** est une technique efficace pour évaluer un polynôme ou effectuer une division polynomiale par un binôme de la forme $(x - c)$. Elle est particulièrement utile pour éviter les calculs lourds lors de l'évaluation ou de la factorisation de polynômes, mais nécessite de connaître au moins une racine entière du polynôme (que l'on trouve parfois en utilisant des valeurs remarquables telles que 0 ou 1). Bien que plus algorithmique qu'algébrique, elle nous semble trouver toute son utilité dans ce précis.

1. On suppose que c est racine de $P(x)$, donc $P(c) = 0$.
2. On ordonne le polynôme $P(x)$.
3. On en prend tous les coefficients $a_n, a_{n-1} \dots a_0$.
4. On pose $b_n = a_n$.
5. On calcule successivement $b_{i-1} = b_i . c + a_{i-1}$ pour $i = n, n-1 \dots 1$.
6. b_0 donne la valeur $P(c)$.

Exemple :

$P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x - 4$ *(et supposons une racine en* $x = 2$).

Les coefficients sont $2, -6, 2, -4$
Posons $b_3 = 2$
Calculs successifs :

$$b_2 = 2\,.\,2 - 6 = -2$$
$$b_1 = -2\,.\,2 + 2 = -2$$
$$b_0 = -2\,.\,2 - 4 = 0$$

le reste nul confirme que $x = 2$ *est bien une racine.*
La factorisation peut donc se faire après division :

$$P(x) = (x-2)(2x^2 - 2x - 2)$$

Laquelle peut d'ailleurs être complétée :

$$P(x) = 2(x-2)(x^2 - x - 1)$$

5. LES EXPRESSIONS RATIONNELLES

Les **expressions rationnelles** forment une famille particulièrement polyvalente d'objets algébriques. Elles combinent opérations arithmétiques, variables et fractions, et apparaissent dès que l'on accepte de diviser par des expressions contenant une variable.

Elles constituent un outil essentiel pour modéliser et résoudre de nombreux problèmes mathématiques, notamment dans l'étude des fonctions et la résolution d'équations. Leur manipulation oblige toutefois à une attention particulière, en raison des restrictions qu'impose la division.

Historiquement liées au développement de l'algèbre symbolique, les expressions rationnelles rappellent une règle fondamentale : en mathématiques, diviser est une opération puissante, mais jamais anodine. Ce chapitre se propose d'en maîtriser l'usage avec rigueur et méthode.

Une **expression rationnelle** est de la forme

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

où p et q sont des polynômes $\neq 0$.

5.1. Simplifier une expression rationnelle

Une expression rationnelle est simplifiée lorsqu'il n'y a aucun facteur commun au numérateur et au dénominateur. Si ce n'est pas le cas, il suffit de supprimer le facteur commun. Mais attention, lorsque ce terme comporte une inconnue, il convient avant tout de s'assurer qu'on ne divise pas par zéro ! Il existe donc au moins une valeur interdite qui doit être signalée comme telle. **Si la solution finale correspond à cette valeur interdite, elle doit être rejetée.**

Exemple :

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 8x + 12} \Rightarrow \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+6)} \Rightarrow \frac{x+3}{x+6}$$

avec $x \neq -2$.

Exercices :

Simplifiez les expressions suivantes (et vérifiez par une valeur quelconque).

(5.1.a) $\frac{x^2+x-42}{x^2-36}$

(5.1.b) $\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$

(5.1.c) $\frac{x^3-2x^2+2x-4}{x^2-7x+10}$

(5.1.d) $\frac{x^3+8}{x^2-4}$

5.2. Multiplier et diviser des expressions rationnelles

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Exemple :

$$\frac{x+9}{6-x} \div \frac{x^2-81}{x-6}$$
$$\frac{x+9}{6-x} \times \frac{x-6}{x^2-81}$$

$$\frac{x+9}{6-x} \times \frac{x-6}{(x-9)(x+9)}$$
$$\frac{(x+9)(x-6)}{(6-x)(x-9)(x+9)}$$
$$\frac{(x-6)}{(6-x)(x-9)} \; avec\; x \neq -9$$
$$\frac{(-1)(6-x)}{(6-x)(x-9)} \; avec\; x \neq -9$$
$$\frac{(-1)}{(x-9)} \; avec\; x \neq -9 \; et\; x \neq 6$$
$$-\frac{1}{(x-9)} \; avec\; x \neq -9 \; et\; x \neq 6$$
$$\frac{1}{9-x} \; avec\; x \neq -9 \; et\; x \neq 6$$

Exercices :

Divisez les expressions suivantes (et vérifiez par une valeur quelconque).

(5.2.a) $\frac{x+3}{5-x} \div \frac{x^2-9}{x-5}$

(5.2.b) $\frac{2-x}{x-4} \div \frac{4-x^2}{4-x}$

(5.2.c) $\frac{3x^2}{x^2-4x} \div \frac{9x^2-45x}{x^2-7x+10}$

(5.2.d) $\frac{a^2-b^2}{3ab} \div (a^2+2ab+b^2)$

5.3. Additionner et soustraire des expressions rationnelles

S'il existe un dénominateur commun, les numérateurs s'additionnent simplement :

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}}$$

Exemple :

$$\frac{5x}{2x+3} + \frac{2}{2x+3} = \frac{5x+2}{2x+3}$$

S'il n'existe pas de dénominateur commun, il faut alors déterminer le PPCM.

Exemple :

$$\frac{8}{x^2-2x-3} + \frac{3x}{x^2+4x+3}$$

En utilisant les techniques de factorisation, on trouve que :

$$x^2-2x-3 = (x+1)(x-2)$$
$$x^2+4x+3 = (x+1)(x+3)$$

Le PPCM est donc $(x+1)(x-2)(x+3)$

Il faut donc multiplier chaque numérateur par l'élément adéquat et reformuler :

$$\frac{8(x+3)+3x(x-2)}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$
$$\frac{8x+24+3x^2-2x}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$
$$\frac{3x^2+6x+24}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$
$$\frac{3(x^2+2x+8)}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$

Exercices :

Résolvez les expressions suivantes (et vérifiez par une valeur quelconque).

(5.3.a) $\frac{9x+14}{x+2} + \frac{x^2+x+1}{x+2}$

(5.3.b) $\frac{3}{x-3} + \frac{2}{x-2}$

(5.3.c) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x+1}$

(5.3.d) $\frac{8x}{x^2-16} - \frac{4}{x-4}$

5.4. Résoudre des équations rationnelles

Résoudre des équations rationnelles peut être complexe selon la nature de l'équation. Il est important de bien comprendre chaque étape et d'être attentif aux exclusions (pas de division par zéro !) pour obtenir une solution précise.

1. Si possible, simplifier l'équation en annulant les dénominateurs. Pour cela, trouver le dénominateur commun et multiplier de chaque côté de l'équation par ce dénominateur commun.
2. Si possible, factoriser l'équation.
3. Trouver les zéros du numérateur.
4. S'assurer des valeurs qui rendraient le dénominateur égal à zéro et les exclure.
5. Tester les solutions.

Exemple :

$$1 - \frac{5}{y} = -\frac{6}{y^2}$$
$$y \neq 0 \; et \; PPCM(y, y^2) = y^2$$

Multiplier chaque membre par le PPCM :

$$y^2\left(1 - \frac{5}{y}\right) = y^2\left(-\frac{6}{y^2}\right)$$

Distribuer et multiplier :

$$y^2 - 5y = -6$$

Rassembler :

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

Factoriser :

$$(y-2)(y-3) = 0$$
$$\Rightarrow y = 2\ ;\ y = 3$$

Exercices :

Résolvez les expressions suivantes (et vérifiez par une valeur quelconque).

(5.4.a) $1 - \frac{2}{x} = \frac{15}{x^2}$

(5.4.b) $1 - \frac{4}{x} = \frac{12}{x^2}$

(5.4.c) $\frac{5}{3x-2} = \frac{3}{2x}$

(5.4.d) $\frac{2}{x+2} + \frac{4}{x-2} = \frac{x-1}{x^2-4}$

6. ÉQUATIONS AVEC RACINES

Les **équations avec des racines**, ou des exposants fractionnaires, se résolvent en cherchant à faire disparaître la racine. La stratégie est simple : on l'isole dans un membre de l'équation, puis on élève les deux membres à la puissance inverse.

On obtient alors une équation plus familière, que l'on peut résoudre par les méthodes classiques. Il faut toutefois rester vigilant, car cette opération peut faire apparaître des solutions indésirables. Une vérification finale se révèle cruciale si l'on veut éviter une catastrophe..

Exemple :

$$\sqrt{2x-1} = 7$$

Le terme sous la racine doit être >0, ce qui implique $x \geq \frac{1}{2}$

$$\left(\sqrt{2x-1}\right)^2 = 7^2$$

$$2x - 1 = 49$$

$$x = 25$$

25 étant supérieur ou égal à ½, la valeur est acceptable.

Toutefois, lorsque différents exposants fractionnaires sont présents dans l'équation et que les propriétés des puissances ne permettent pas de les simplifier, le recours à des techniques sophistiquées ou à des approches numériques[17] peut être nécessaire.

[17] Une approche numérique est une méthode de résolution de problèmes qui utilise des calculs approximatifs, souvent sur ordinateur. Plutôt que de trouver des solutions exactes selon une voie très longue et/ou difficile, on recherche des résultats proches de la réalité en s'appuyant sur des algorithmes plus simples. Si le résultat

Exemple :

$$3x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{3}} - 5 = 0$$

ne peut donner ses solutions par des méthodes d'algèbre élémentaire et une approche numérique est requise pour obtenir $x_1 \approx 2{,}672$ *et* $x_2 \approx 0{,}588$.

Exercices :

Résolvez les équations suivantes (et vérifiez par une valeur quelconque).

(6.3.a) $\sqrt{3x-5} - 5 = 0$

(6.3.b) $\sqrt{x-1} + 1 = x$

(6.3.c) $3x^{\frac{2}{3}} + 7 = 0$

(6.3.d) $\sqrt{4x-3} = \sqrt{3x+2}$

---

n'est pas rigoureusement exact, il peut être suffisamment proche que pour être acceptable dans un contexte donné.

7. LES DROITES DANS LE PLAN

L'étude des **droites dans le plan** constitue l'un des points de rencontre les plus naturels entre l'algèbre et la géométrie, décrivant des relations que l'on retrouve dans de très nombreuses disciplines.

Depuis Descartes et l'introduction de la géométrie analytique, la droite est devenue l'exemple par excellence d'un objet que l'on peut à la fois dessiner et calculer. Cette double nature explique pourquoi elle sert de modèle de base pour tant de concepts essentiels : fonctions linéaires, vecteurs, systèmes d'équations, ou encore notions de parallélisme et d'intersection.

Ce chapitre propose d'examiner les droites sous différents angles : leurs équations, leurs propriétés géométriques, ainsi que les relations algébriques qui les unissent. Comprendre les droites, c'est en fait comprendre bien plus que des droites ; et c'est précisément ce qui en fait un passage obligé de tout parcours en algèbre.

7.1. Droites et équations

Une **droite** représente graphiquement l'ensemble des points d'une équation du premier degré de type : $y = ax + b$.

- a détermine la **pente** de la droite (parfois appelée *coefficient directeur*)
- b détermine la **hauteur** de la droite, son intersection avec l'axe des y.

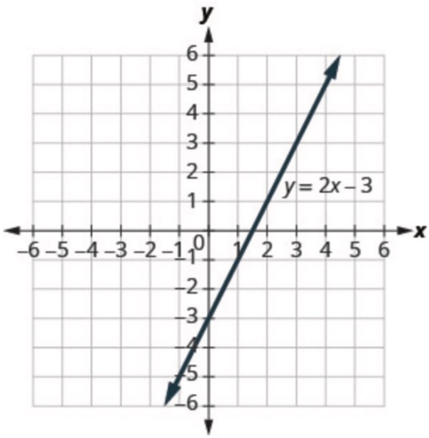
Il s'agit là d'une fonction dite *affine*, c'est-à-dire obtenue par addition et multiplication de la variable par des constantes.

$$\boxed{f(x) = ax + b}$$

Exemple :

La droite $y = 2x - 3$ *possède donc les caractéristiques suivantes :*

- *Une pente de 2 (pour chaque unité de x, elle gagne 2 unités de y) ;*
- *Elle coupe l'axe des y en -3.*



7.2. Équation d'une droite passant par deux points

Ces caractéristiques permettent de déterminer l'équation d'une droite passant per deux points. Il faut d'abord déterminer la pente *a* au moyen de la formule :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Pour trouver ensuite l'élévation *b*, il faut remplacer dans l'équation trouvée *x* et *y* par les valeurs de l'un des deux points.

Exemple :

Trouver l'équation de la ligne passant par (5, 4) et (3, 6).

$$a = \frac{6-4}{3-5} = \frac{2}{-2} = -1$$

La droite a donc l'équation $y = -x + b$

On y remplace x et y par les valeurs du premier point (par exemple) :

$$4 = -5 + b \;\Rightarrow b = 9$$

La droite a donc pour équation $y = -x + 9$.

Exercices :

Déterminez l'équation des droites passant par les couples de points suivants (et vérifiez graphiquement la solution).

(7.2.a) (3, 1) et (5, 6)

(7.2.b) (1,4) et (6, 2)

7.3. Équation d'une droite parallèle à une autre

La recherche d'une droite parallèle à une autre procède de la même technique, puisqu'elles ont toutes deux la même pente. Il suffit donc de rechercher son élévation comme dans l'exemple précédent.

Exemple :

Trouver l'équation de la droite parallèle à la droite $y = 2x - 3$ *et passant par le point (-2, 1). La droite aura donc une équation de la forme* $y = 2x + b$.

On remplace x et y par les valeurs du point et on résout l'équation :

$$1 = 2(-2) + b$$

$$1 = -4 + b \;\Rightarrow b = 5$$

L'équation de la droite est donc $y = 2x + 5$.

Exercices :

Déterminez l'équation des droites parallèles aux droites données et passant par le point donné (et vérifiez graphiquement la solution).

(7.3.a) Parallèle à $y = 3x + 1$ et passant par (4, 2).

(7.3.b) Parallèle à $y = \frac{x}{2} - 3$ et passant par (6, 4).

7.4. Équation d'une droite perpendiculaire à une autre

L'**équation d'une perpendiculaire** procède d'une façon comparable à ceci près que la pente d'une perpendiculaire à une droite est l'inverse opposé de la pente originale[18] :

$$a_2 = -\frac{1}{a_1}$$

Exemple :

Trouver l'équation de la droite perpendiculaire à $y = 2x - 3$ *et passant par le point (-2, 1).*

La pente de la nouvelle droite sera l'inverse opposé à celle de la première, donc

$$a = -\frac{1}{2}$$

L'équation aura donc la forme $y = -\frac{x}{2} + b$.

On trouve à nouveau b en injectant les valeurs du point donné en x et y :

[18] La démonstration en est assez simple, mais fait appel à des notions trigonométriques que nous n'avons pas encore abordées. Le lecteur sceptique pourra toutefois facilement s'en convaincre en traçant quelques exemples.

$$1 = -\frac{-2}{2} + b$$
$$1 = 1 + b \Rightarrow b = 0$$

La droite aura donc pour équation $y = -\frac{x}{2}$

Exercices :

Trouvez l'équation des droites (et vérifiez graphiquement la solution).

(8.4.a) Perpendiculaire à $y = 3x + 1$ et passant par (4, 2).

(8.4.b) Perpendiculaire à $y = \frac{x}{2} - 3$ et passant par (6, 4).

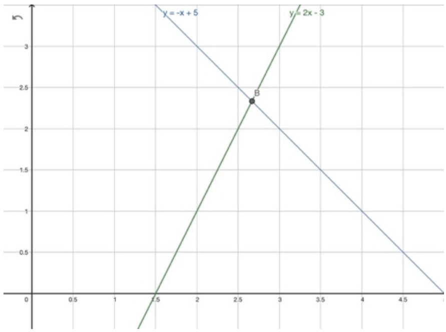
7.5. Systèmes d'équations linéaires

Nous avons vu diverses façons de résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, mais nous avons vu aussi qu'une équation du premier degré à deux inconnues peut être représentée par une droite dans le plan. La solution du système est géométriquement représentée par le point appartenant à ces deux droites, à savoir leur point d'intersection.

Exemple :

Chaque équation du système suivant peut être représentée par une droite. Et la seule valeur du couple (x, y) *qui satisfait à ces deux équations est représentée graphiquement par le seul point d'intersection (B).*

$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{8}{3}\,; y = \frac{7}{3} \Leftrightarrow B\left(\frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$$



Dans cet exemple, une solution unique peut être trouvée, mais ce n'est pas toujours le cas. Pour un système de deux équations linéaires dans le plan, trois situations peuvent se produire :

- Système compatible déterminé : une solution unique (les droites se croisent en un point) ;
- Système incompatible : aucune solution (les deux droites sont parallèles) ;
- Système compatible indéterminé : Une infinité de solutions (les deux droites se confondent).

Exercices :

Résolvez les expressions suivantes (et vérifiez en substituant les inconnues de l'équation de départ par les solutions trouvées).

(7.5.a) $\begin{cases} 6y = 3x - 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$

(7.5.b) $\begin{cases} 12x - 8y = 4 \\ 6x + y = 12 \end{cases}$

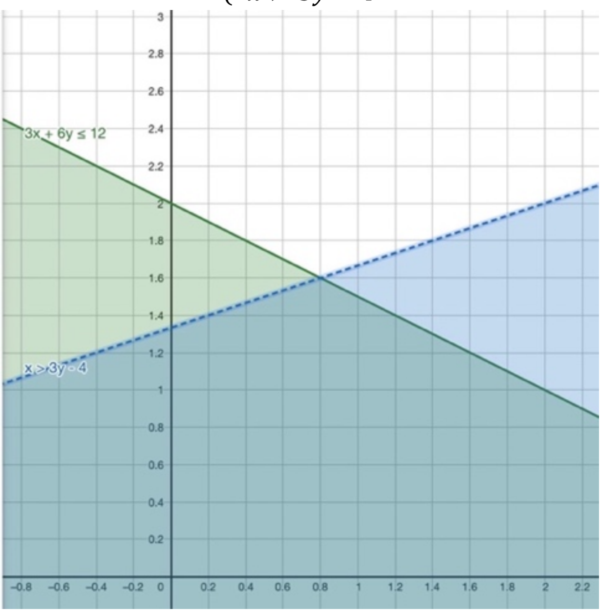
7.6. Systèmes d'inéquations linéaires

Un **système d'inéquations du premier degré** à deux inconnues est un ensemble composé d'au moins deux inéquations et peut aussi bénéficier d'une représentation graphique. La solution de chaque inéquation sera représentée par une région du plan cartésien. La région représentant l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations correspond donc à l'intersection des régions de chaque inéquation du système.

Exemple :

Le système d'inéquations suivant délimite deux régions du plan cartésien qui se superposent, laissant en blanc la région représentant l'ensemble des solutions du système.

$$\begin{cases} 3x + 6y \leq 12 \\ x > 3y - 4 \end{cases}$$



8. FONCTIONS ET GRAPHES

Les **fonctions** constituent un outil central de l'algèbre. Elles permettent de décrire avec précision la manière dont une grandeur dépend d'une autre et établissent un lien essentiel entre les expressions algébriques et leur représentation géométrique. Dès que l'on cherche à comprendre comment une variation entraîne une autre variation, les fonctions ne sont jamais bien loin.

Dans ce chapitre, une fonction sera étudiée comme une *application* associant à chaque valeur d'une variable indépendante une valeur unique d'une variable dépendante. Nous verrons comment déterminer son domaine de définition, représenter graphiquement son comportement dans le plan et interpréter les informations fournies par son graphe. Depuis que les mathématiciens ont pris l'habitude de « dessiner des équations », les graphes sont devenus un outil irremplaçable pour voir ce que les formules disent parfois plus difficilement.

8.1. Les fonctions

Une **fonction** est un type de relation entre une variable indépendante et une variable liée (ou dépendante). Chaque valeur de la variable indépendante – souvent notée x – est associée à *une et une seule* valeur de la variable liée – souvent notée y ou $f(x)$.

Exemple :

$$f(x) = 2x + 5$$
$$y = 3x - 1$$

Puisque la variable indépendante *x* peut prendre une infinité de valeurs, *f(x)* pourra, elle aussi, prendre (sauf cas spécial) une infinité de valeurs. Toutefois, l'ensemble des valeurs de *x* et l'ensemble des valeurs de *f(x)* appartiendront parfois à différentes classes de nombres. Une notation fonctionnelle précise ces appartenances.

Exemple :

$$f(x) = \frac{x}{2}$$

Si x appartient à l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$, $f(x)$ devra nécessairement appartenir à un ensemble plus large, celui des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. Concernant l'exemple précédent, on peut ainsi écrire :

$$f : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{Q}$$

qui se lit : « La fonction f va de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Q}$ et associe à un élément x de l'ensemble de départ un élément f(x) de l'ensemble d'arrivée. »

Attention : une relation qui associe à une valeur de la variable indépendante plusieurs valeurs de la variable dépendante n'est pas une fonction !

Exemple :

$$y^2 = 5 - x$$

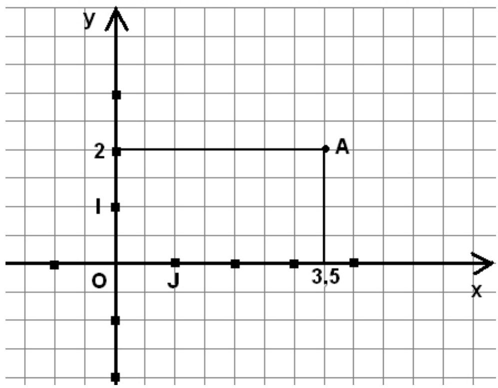
n'est pas une fonction, car pour $x = 1$ par exemple, y pourra prendre deux valeurs distinctes : 2 et -2. On ne peut donc en aucun cas noter $f^2(x) = 5 - x$, ni $f(x)^2 = 5 - x$.

8.2. Le plan orthonormé et ses coordonnées

Le **plan orthonormé** est défini par deux axes perpendiculaires l'un à l'autre (*ortho*) disposant de graduations identiques (*normé*).

Par convention l'axe horizontal est appelé *abscisse* ou *axe des x* ; l'axe vertical est appelé *ordonnée* ou *axe des y*. Le point d'intersection de ces deux axes est l'*origine,* car il constitue le point de départ des numérotations de chaque axe.

Chaque point du plan dispose de coordonnées qui correspondent à ses projections sur l'axe des x et sur l'axe des y. Dans le schéma suivant, le point *A* a pour coordonnées (3,5 ; 2)

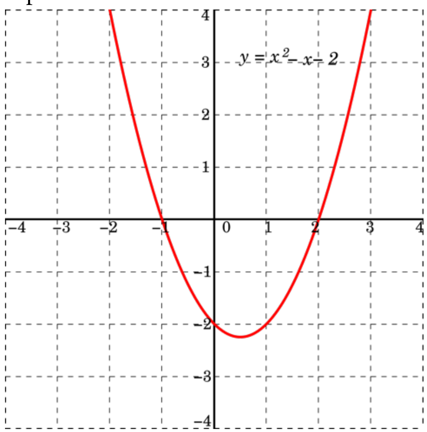


C'est le type de repère le plus utilisé, mais il en existe d'autres, comme :

- Le **repère log-log** est un repère dans lequel les deux axes sont gradués selon une échelle logarithmique, ce qui permet de représenter linéairement des phénomènes où y est une fonction puissance de x.
- Le **repère semi-logarithmique** où l'un des deux axes seulement est gradué selon une échelle logarithmique.
- Le **repère en coordonnées polaires**, dans lequel chaque point est déterminé par un angle (à l'axe polaire) et une distance au pôle, ce qui permet de représenter facilement l'évolution d'un angle, comme celui d'un pendule p. ex.
- Et bien d'autres…

8.3. Représentation graphique des fonctions

Sur le plan orthonormé, une fonction peut être représentée par une courbe qui regroupe l'ensemble des points $(x, f(x))$. Les valeurs de $f(x)$ sont conventionnellement attribuées à l'axe des y. Autrement dit, la **représentation graphique** d'une fonction consiste à en dessiner le tracé, c'est-à-dire une image de l'ensemble des valeurs que peut prendre cette fonction :

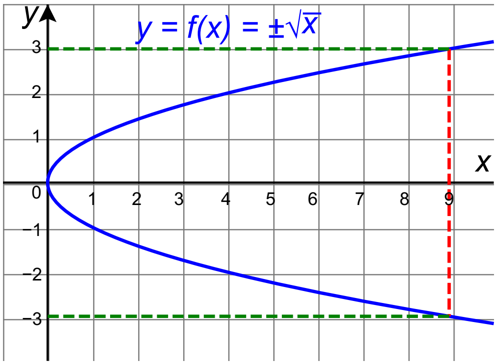


Attention, une fonction $f(x)$ est une application qui, à un nombre x, associe une valeur unique. Tout graphe ne représente pas donc une fonction.

> *Si une droite verticale peut couper le graphe en plus d'un point, ce graphe ne représente pas une fonction.*

Exemple :

À chaque valeur de x, le graphe suivant associe deux valeurs de y :



8.4. Domaine d'une fonction

Le **domaine** d'une fonction $f(x)$ correspond à l'ensemble des valeurs que peut prendre sa variable indépendante *x*. Il s'exprime entre crochets. Similairement, l'**image** d'une fonction $f(x)$ correspond à l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable dépendante.

Attention, si le crochet est tourné vers *l'intérieur*, la borne est incluse dans l'intervalle ; si le crochet est tourné vers *l'extérieur*, la borne est exclue de l'intervalle. Le crochet d'une borne infinie doit donc toujours être tourné vers l'extérieur.

Exemple 1 :

$$f(x) = x^2 - 1$$

Comme il n'y a aucune restriction aux valeurs de x*, le domaine de* $f(x)$ *est* $]-\infty, \infty[$.

Exemple 2 :

$$f(x) = \frac{x+1}{2-x}$$

La division par zéro étant illicite, x *ne peut prendre la valeur de 2. Dès lors le domaine de* $f(x)$ *est* $]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$ *ou plus simplement* $x \neq 2$.

Exemple 3 :

$$f(x) = \sqrt{5-x}$$

Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ *des nombres réels, les racines carrées ne peuvent s'appliquer qu'à des nombres positifs. Dès lors, le domaine de la fonction est* $]-\infty, 5]$.

Exercices :

Trouver le domaine des fonctions suivantes.

(8.4.a) $f(x) = 5 - x + x^3$

(8.4.c) $f(x) = \frac{1+4x}{2x-1}$

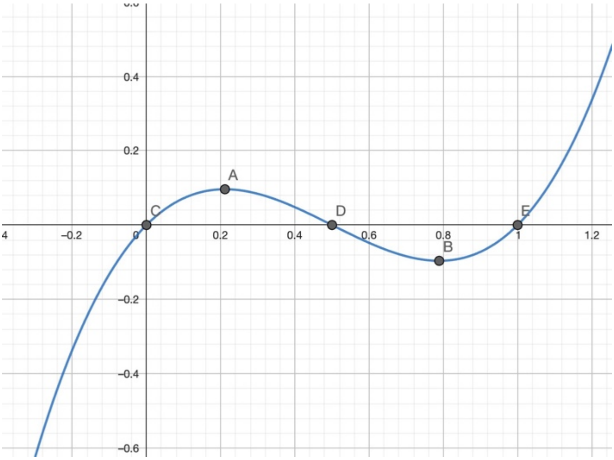
(8.4.b) $f(x) = \sqrt{5-2x}$

(8.4.d) $f(x) = \frac{2x^3-250}{x^2-2x-15}$

8.5. Évolution d'une fonction

Une fonction peut être monotone, par exemple une droite, mais peut aussi disposer de caractéristiques, telles que des maximas, des minimas ou des points d'inflexion. Le calcul de ces éléments sort du champ de l'algèbre et ressort du domaine de l'analyse. Nous n'en parlerons pas ici. Toutefois, l'observation des graphes de fonction permet, sans calcul analytique, de réaliser des approches utiles.

Ainsi, dans la courbe suivante (d'équation $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$), divers points sont visuellement remarquables :



- *A* et *B* sont des **extrema locaux** (respectivement **maximum** et **minimum** local). En effet, s'ils représentent un maximum et un minimum dans leur entourage immédiat, des valeurs plus élevées et plus basses sont atteintes plus loin par la fonction[19].
- *C*, *D* et *E* représentent les **zéros de la fonction**, c'est-à-dire les points pour lesquels la fonction est nulle. Ils se trouvent dès lors sur l'axe des *x*.
- *D* est en outre un **point d'inflexion** : à sa valeur, la concavité préalablement négative (tournée vers le bas) devient positive.

Une autre caractéristique intéressante peut être, elle, calculée : le taux de change moyen d'une fonction désigne l'évolution de la variable dépendante en fonction de celle de la variable indépendante dans un intervalle donné. La formule suivante – nous l'espérons – parle d'elle-même[20] :

---

19 L'étude de ces points (ainsi que du point d'inflexion) ressort de l'analyse et ne sera pas abordée dans le précis d'algèbre.

20 Le symbole Δ (delta) désigne souvent une différence entre deux grandeurs homologues.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Exercices :

Calculer le taux de change moyen la pente de la droite) des fonctions suivantes.

(8.5.a) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ dans l'intervalle [2, 4]

(8.5.b) $f(x) = \frac{2}{x^2}$ dans l'intervalle [2, 6]

8.6. Racines d'une fonction et équations

On comprend que les racines d'une fonction et les solutions d'une équation sont étroitement liées puisque les racines d'une fonction sont, en fait, les solutions de l'équation obtenue en égalant la fonction à zéro.

Si nous avons une équation $f(x) = 0$, alors les solutions de cette équation sont simplement les racines de la fonction $f(x)$.

Exemple :

Soit la fonction $f(x) = x^2 - 4$.
Les racines de la fonction sont les valeurs pour lesquelles l'équation $x^2 - 4 = 0$.

8.7. La fonction valeur absolue

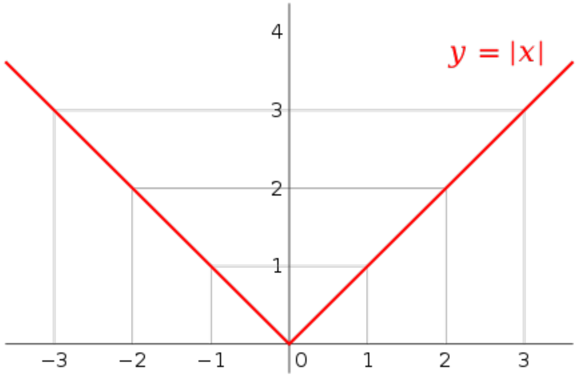
Certaines fonctions peuvent toutefois réserver quelques surprises. Par exemple, la **valeur absolue** d'un nombre peut être comprise comme sa distance à zéro. Pratiquement, la valeur absolue d'un nombre positif est égale à ce nombre et celle d'un nombre négatif s'obtient en le rendant positif. Sa notation est la suivante : $|x|$.

$$|x| = x, si\ x \geq 0$$
$$|x| = -x\ si\ x < 0$$

Il s'ensuit notamment les propriétés suivantes :

$$|a| \geq 0$$
$$|-a| = a$$
$$|ab| = ab$$
$$|a| = \sqrt[2]{a^2}$$

Nous pouvons donc facilement construire une fonction $f(x) = |x|$ sur cet opérateur. Son graphique sera naturellement symétrique par rapport à l'axe des y :



Bien sûr, cette fonction peut avoir son extremum n'importe où dans le plan. Elle adopte alors la forme générale suivante :

$$f(x) = a|x - h| + k$$

dont on déduit facilement les propriétés suivantes :

- le domaine $x \in \mathbb{R}$;
- l'extremum est en (h, k) ;
- la fonction a un axe de symétrie en $x = h$.

La résolution d'une équation contenant une valeur absolue n'est possible que lorsque l'égalité à laquelle fait face cette valeur absolue est positive, sinon, l'équation n'admet pas de solution. Ceci peut mener à des restrictions si la valeur absolue est égale à une expression algébrique.

Exemple 1 :

$$|2x - 5| = -3x + 12$$
$$-3x + 12 \geq 0 \;\Rightarrow -3x \geq -12 \;\Rightarrow x \leq 4$$

Exemple 2 :

$$|2x + 6| = 3$$

Puisque 3 ≥0, l'équation peut être résolue, mais il y a deux possibilités :

$$2x + 6 = 3 \; et \; 2x + 6 = -3$$
$$\Rightarrow x \in \left\{-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$$

Exercices :

(8.7.a) Déterminez les propriétés de la fonction $f(x) = -\frac{1}{2}|x + 1| + 2$

(8.7.b) Résolvez $|x - 4| = -25$.

(8.7.c) Résolvez $\frac{|x+5|}{2} = x - 2$

(8.7.d) Résolvez $3|x - 1| + 6 = 0$

(8.7.e) Trouvez les zéros de la fonction $f(x) = |4x + 1| - 7$

8.8. Équations implicites

Les équations que nous avons étudiées jusqu'à présent sont explicites. Ce sont des relations mathématiques où une variable (généralement notée y) est exprimée en termes d'une autre variable (généralement notée x) : $y = f(x)$. Cependant, il existe des situations où une relation entre x et y n'est pas exprimée de manière explicite, mais implicite. Les **équations implicites** sont des équations où x et y sont liés, mais où y n'est pas isolé.

Ces équations ne sont pas réductibles à des équations explicites, c'est-à-dire qu'on ne peut les exprimer utilement sous la forme $y = f(x)$. Elles peuvent en outre avoir plusieurs solutions pour une valeur donnée de x, ce qui implique *aussi* qu'elles ne peuvent pas être exprimées sous la forme d'une fonction, puisqu'une fonction est une relation entre une variable indépendante et *une* variable dépendante seulement.

Une équation implicite décrit une courbe, pas une fonction.

Exemple :

L'équation du cercle unitaire est :

$$x^2 + y^2 = 1$$

Nous pourrions certes reformuler l'équation sous une forme « $y =$ », mais celle-ci serait plus complexe et moins utile puisque y n'y serait pas une fonction de x :

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Si une reformulation est impossible, la résolution d'une équation implicite passe par des outils d'analyse ou par des approches numériques et sort donc du cadre de ce précis.

8.9. Équations paramétriques

Les **équations paramétriques** forment un autre mode particulièrement flexible de description des courbes et des objets géométriques. Elles sont notamment utiles pour exprimer des courbes complexes ou, en sciences naturelles, des phénomènes qui varient avec le temps ou d'autres paramètres. Par exemple, elles sont couramment utilisées en physique pour modéliser le mouvement des objets, en astronomie pour suivre la trajectoire des planètes.

Chaque composante d'une courbe (par exemple x et y dans le plan cartésien) est exprimée en fonction d'un paramètre t tel que le temps. Ainsi, au lieu d'avoir une équation de type $y = f(x)$, nous en avons deux formant un système :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

La résolution d'une équation paramétrique consiste principalement à éliminer le paramètre au moyen d'expressions algébriques afin de pouvoir exprimer une équation en fonction de l'autre.

Exemple :

Soit les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = 2t + 1 \\ y(t) = 3t - 2 \end{cases}$$

Isolons par exemple t *dans la première équation :*

$$x(t) = 2t + 1$$

$$2t = x(t) - 1$$

$$t = \frac{x(t) - 1}{2}$$

Substituons ensuite cette expression de t *dans la deuxième équation :*

$$y(t) = 3t - 2$$
$$y(t) = 3\frac{x(t) - 1}{2} - 2$$
$$y(t) = \frac{3x(t)}{2} - \frac{7}{2}$$

Nous pouvons dès lors supprimer le paramètre t *afin de trouver une classique équation de droite :*

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$$

Les équations paramétriques sont particulièrement propices à l'étude des positions relatives des droites dans l'espace.

Exemple :

Soient les deux droites :

$$D_1 = \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \text{ et } D_2 = \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 3 + 2s \\ z = -1 + s \end{cases}$$

Les vecteurs directeurs sont donnés par les coefficients des paramètres, soient respectivement :
$u_1 = (2,1,4)$ et $u_2 = (-1,2,1)$

Pour que les droites soient parallèles, leurs vecteurs directeurs doivent être colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel k *tel que* $u_1 = ku_2$.
Nous constatons que cette condition n'est pas rencontrée, puisque $\frac{2}{-1} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{4}{1}$
Les droites ne sont donc pas parallèles.

Pour que les droites soient sécantes, elles doivent partager un point commun ; Autrement dit, le système suivant doit posséder une solution :

$$\begin{cases} 1 + 2t = 2 - s \\ -1 + t = 3 + 2s \\ 3 + 4t = -1 + s \end{cases}$$

Les solutions trouvées en résolvant le système formé par les deux premières équations ($t = \frac{6}{5}$ *et* $s = -\frac{7}{5}$*) ne satisfont pas à la troisième équation. Le système n'acceptant pas de solution, les droites ne se croisent pas.*

Enfin, puisque les droites ne sont ni parallèles ni sécantes,nous en déduisons qu'elles sont en outre ***non coplanaires****.*

Exercices :

Une particule se déplace le long d'une trajectoire donnée par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = 2\mathrm{t} + 1 \\ y(t) = 3\mathrm{t} - 4 \end{cases}$$

(8.9.a) Trouvez les coordonnées de la particule au temps $t = 1$.

(8.9.b) Déterminez l'équation $y = f(x)$ équivalente.

9. OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS

Nous avons déjà vu comment opérer sur des nombres et sur des inconnues. Il est désormais temps d'étendre ces opérations à des objets plus ambitieux : les fonctions elles-mêmes. Loin d'être une simple curiosité formelle, cette étape marque un approfondissement essentiel de l'algèbre.

Dans ce chapitre, nous étudierons les principales **opérations applicables aux fonctions**. Nous verrons comment ces opérations transforment les fonctions, modifient leurs propriétés et se traduisent graphiquement par des déformations, des symétries ou des changements de comportement parfois très parlants.

Manipuler des fonctions comme des objets à part entière permet de mieux comprendre les relations qu'elles modélisent. Ces outils jouent un rôle central aussi bien en algèbre qu'en analyse ou en géométrie, et constituent une étape incontournable avant l'étude de notions plus avancées. Autrement dit, après avoir appris à lire les graphes, il est temps de commencer à les faire bouger.

9.1. Combinaison de fonctions

Les fonctions peuvent se combiner de façon arithmétique :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Le domaine de définition de la fonction combinée est l'intersection des domaines de définition des deux fonctions initiales. Dans le cas d'une division, il faut en outre exclure les valeurs pour lesquelles le diviseur s'annule.

Exemple :

Soient $f(x) = x - 1$ *et* $g(x) = x^2 - 1$
Déterminer et simplifier $(g - f)(x)$

$$(g - f)(x) = g(x) - f(x)$$
$$(g - f)(x) = x^2 - 1 - (x - 1)$$
$$(g - f)(x) = x^2 - x$$
$$(g - f)(x) = x(x - 1)$$

Par ailleurs, il est licite de composer des fonctions, c'est-à-dire de remplacer la variable indépendante de la première fonction par l'expression représentant la variable dépendante de la seconde fonction.

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)}$$

La fonction $(g \circ f)$ est appelée la composée de g par f. L'expression se lit « g rond f» et n'est pas commutative comme illustré dans l'exemple suivant.

Exemple :

Soient $f(x) = 2x + 3$ *et* $g(x) = x^2$.

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$
$$(f \circ g)(x) = f(x^2)$$
$$(f \circ g)(x) = 2(x^2) + 3$$
$$(f \circ g)(x) = 2x^2 + 3$$

Par ailleurs,

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$
$$(g \circ f)(x) = g(2x + 3)$$
$$(g \circ f)(x) = (2x + 3)^2$$
$$(g \circ f)(x) = 4x^2 + 12x + 9$$

Le domaine d'une fonction composite $(f \circ g)(x)$ est l'ensemble des valeurs de x dans le domaine de $g(x)$ pour lesquelles $g(x)$ est dans le domaine de f.

Exemple :

Soient $f(x) = \sqrt{x + 2}$ *et* $g(x) = \sqrt{3 - x}$. *Déterminer le domaine de* $(f \circ g)(x)$.

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{\sqrt{3 - x} + 2}$$

Une racine devant être positive dans $\mathbb{R}$, *le domaine de g est* $]-\infty, 3]$.

Pour la même raison, $\sqrt{3 - x} + 2 \geq 0$, *ce qui donne à* $f \circ g$ *le même domaine qu'à g :* $]-\infty, 3]$.

Exercices :

(9.1.a) Soient $f(x) = 1 + x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Déterminez et simplifiez $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$.

(9.1.b) Soient $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = 3 - x$. La composition de ces fonctions est-elle commutative ?

(9.1.c) Soient $f(x) = \frac{5}{x-1}$ et $g(x) = \frac{4}{3x-2}$. Déterminez le domaine de $(f \circ g)(x)$.

9.2. Transformation d'une fonction

La représentation graphique d'une fonction peut subir diverses transformations. Nous examinerons ici quel changement opérer sur une fonction afin d'arriver à une transformation voulue de sa représentation dans le plan.

Une **translation verticale** s'opère simplement en ajoutant une valeur à la fonction : si $g(x) = f(x) + k$, la fonction g sera décalée verticalement de k unités de la fonction f.

Une **translation horizontale** s'opère simplement en soustrayant une valeur à la variable indépendante : si $g(x) = f(x - k)$, la fonction g sera décalée horizontalement de k unités de la fonction f.

Exemple :

Écrire une fonction g dont la représentation graphique correspond à la fonction f décalée de 1 unité vers la droite et de 2 unités vers le haut :

$$g(x) = f(x - 1) + 2$$

Il est de même possible d'écrire une fonction dont la représentation graphique est une **réflexion verticale** relative à l'axe des x :

$$g(x) = -f(x)$$

ou **horizontale** relative à l'axe des y :

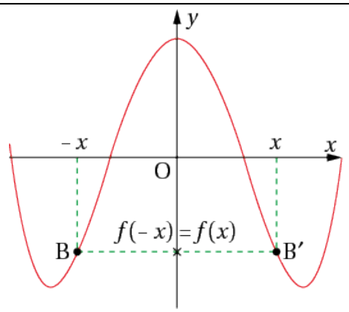
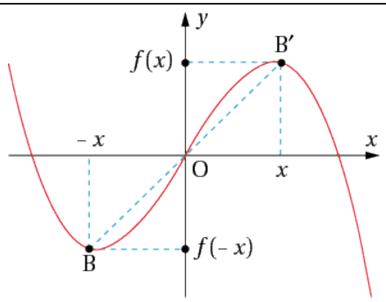
$$g(x) = f(-x)$$

Exemple :

Soit $f(x) = \sqrt{x}$, déterminer la fonction $g(x)$ identique à $f(x)$ après une réflexion horizontale puis verticale.

$$g(x) = -\sqrt{-x}$$

Ces opérations permettent de définir des fonctions paires et impaires : une fonction est paire si $f(x) = f(-x)$, et impaire si $f(x) = -f(-x)$:

<table>
<tr><th>Fonction paire</th></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><th>Fonction impaire</th></tr>
<tr><td>
</td></tr>
</table>

Les dernières transformations que nous examinerons sont la compression et la dilatation.

La fonction $f(x)$ subira une **déformation verticale** en la multipliant par un facteur α. Si $\alpha > 1$, la fonction sera dilatée ; si $0 < \alpha < 1$, la fonction sera compressée :

$$g(x) = \alpha f(x)$$

La fonction $f(x)$ subira une **déformation horizontale** en multipliant sa variable indépendante par un facteur α. Si $\alpha > 1$, la fonction sera compressée d'un facteur$\frac{1}{\alpha}$; si $0 < \alpha < 1$, la fonction sera dilatée d'un facteur $\frac{1}{\alpha}$:

$$g(x) = f(\alpha x)$$

Exercices :

(9.2.a 💡) La fonction $f(x) = x^3 + 2x$ est-elle paire, impaire ou quelconque ?

(9.2.b 💡) Écrire la fonction qui dilatera verticalement d'un facteur 3 la fonction $f(x) = 3x^2$.

9.3. Fonction réciproque

La **réciproque d'une fonction** est, en quelque sorte, une autre fonction qui annule les effets de la fonction d'origine. Autrement dit, la réciproque d'une fonction $f(x)$est la fonction qui, appliquée à $f(x)$, donnera x. Elle se note $f^{-1}(x)$. Par exemple, si $h(x)$ convertit des degrés centigrades en degrés Fahrenheit, $h^{-1}(x)$ opérera la conversion inverse.

D'une façon plus formelle :

$$\boxed{f^{-1}\big(f(x)\big) = f\big(f^{-1}(x)\big) = x}$$

Graphiquement, $f(x)$ et $f^{-1}(x)$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Pour trouver $f^{-1}(x)$, il suffit d'écrire la fonction sous la forme $y = f(x)$, puis d'intervertir les variables *x* et *y*.

Exemple :

$$f(x) = \frac{x}{3} + 2$$
$$y = \frac{x}{3} + 2 \Rightarrow x = \frac{y}{3} + 2$$
$$x - 2 = \frac{y}{3}$$
$$3(x - 2) = y$$
$$2x - 6 = y$$
$$y = 2x - 6$$
$$f^{-1}(x) = 2x - 6$$

La réciproque d'une fonction n'est pas toujours une fonction. Ainsi, la réciproque de la fonction valeur absolue s'obtient classiquement en interchangeant *x* et *y*, puis en isolant *y* de façon à former deux équations. Il faut ensuite déterminer le domaine de la réciproque obtenue.

Exemple :

$$f(x) = 2|x - 8| + 2$$
$$y = 2|x - 8| + 2$$
$$x = 2|y - 8| + 2$$
$$\frac{x}{2} - 1 = y - 8$$
$$\Rightarrow y = \frac{x}{2} + 7$$
$$-\left(\frac{x}{2} - 1\right) = y - 8$$

Le sommet de $f(x)$*étant en (8, 2), le somment de* $f^{-1}(x)$ *sera en (2, 8).*

Le domaine de la réciproque sera limité à gauche par $x = 2$ *; il sera défini par* $[2, \infty[$.

Attention, certaines fonctions n'ont pas de réciproque. Une fonction $f(x)$ doit être **bijective** (injective et surjective) pour posséder une fonction réciproque.

- Chaque valeur y dans l'image de $f(x)$ doit correspondre à une seule valeur x (injectivité).
- L'ensemble des valeurs $f(x)$ doit couvrir tout le codomaine (surjectivité).

Si l'une de ces propriétés manque, la fonction n'a pas de réciproque.

Exemple :

La fonction $f(x) = x^2$ *n'a pas de réciproque, car elle n'est pas injective sur* $\mathbb{R}$ *:* $f(2) = 4$ *et* $f(-2) = 4$.

Exercices :

Trouvez la réciproque des fonctions suivantes.

(9.3.a 💡) $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

(9.3.b 💡) $f(x) = 3 - x$

(9.3.c 💡) $f(x) = \frac{x}{x+2}$

(9.3.d 💡) $f(x) = (x - 3)^2$

10. ÉQUATIONS DE DEGRÉS SUPÉRIEURS

L'étude des équations polynomiales consiste à déterminer les valeurs d'une variable pour lesquelles un polynôme s'annule. Après les équations linéaires, il est naturel de s'aventurer vers des degrés plus élevés et de s'interroger sur les méthodes permettant d'en calculer les solutions.

Ce chapitre accorde une place centrale aux équations quadratiques, qui constituent le dernier cas pour lequel une méthode de résolution générale et systématique est facilement accessible. Les équations de degré trois et quatre demanderont elles un peu plus de sueur… Les procédés généraux plus complexes, qui ont longtemps mobilisé l'ingéniosité des mathématiciens de la Renaissance, seront présentés comme des ouvertures théoriques plutôt que comme des outils à maîtriser.

Le chapitre se conclura par une réflexion sur les limites mêmes de la résolution algébrique, rappelant que tout polynôme ne se laisse pas apprivoiser par une formule élégante. Cette constatation conduira naturellement à l'introduction des approximations polynomiales, qui offrent une manière pragmatique de manipuler les fonctions récalcitrantes.

10.1. Équations quadratiques

Une **fonction quadratique** est une fonction polynomiale de degré 2 à une inconnue qui peut être représentée par sa forme générale :

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)}$$

Dans un plan cartésien, elle dessine par une **parabole** qui peut couper, ne pas couper ou être tangente à l'axe des x, ayant pour chacun de ces cas 2, 0 ou 1 solution. Ces solutions sont les zéros de l'équation. Une équation quadratique adopte dès lors la forme générale :

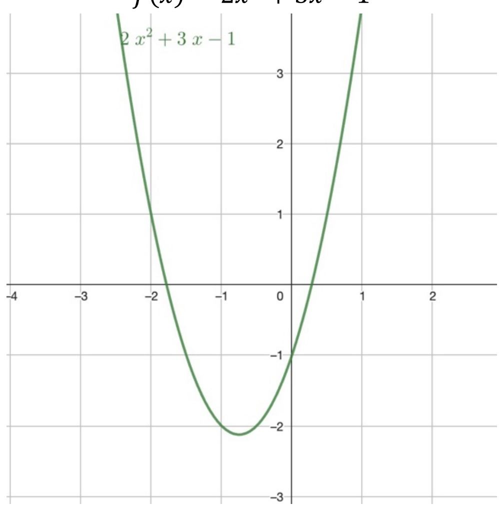
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Sa résolution consiste à chercher les valeurs de x pour lesquelles cette équation s'annule. Les solutions de l'équation correspondent donc aux zéros de la fonction quadratique.

Exemple :

La fonction suivante admet deux solutions.

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$$



Le calcul du discriminant Δ de la fonction permet d'en calculer le nombre de zéros.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Il est utile afin de déterminer le nombre de zéros de la fonction examinée :

- Si $\Delta > 0$, la fonction possède deux zéros distincts ;
- si $\Delta = 0$, la fonction ne possède qu'un zéro ;
- si $\Delta < 0$, la fonction ne possède aucun zéro.

Plusieurs méthodes permettent de déterminer les solutions d'une équation quadratique.

D'entre elles, la factorisation associée à la règle du produit nul, que nous avons abordée précédemment, est une technique très puissante une fois alliée à la règle

Factoriser une équation nulle permet donc généralement de la résoudre facilement et différentes techniques sont disponibles pour ce faire. Nous connaissons déjà la mise en évidence d'un facteur commun et la technique du produit-somme.

Exemple 1 :

Mise en évidence d'un facteur commun.

$$x^2 - 7x = 0$$

L'équation n'est pas factorisée ; on peut le faire facilement, car il existe un facteur commun.

$$x(x-7) = 0$$

$$x = 0 \; et \; x - 7 = 0$$

$$x = 0 \; et \; x = 7$$

Exemple 2 :

Utilisation de la technique du produit-somme.

Déterminer les zéros de la fonction $f(x) = x^2 - 3x - 10$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

Quels sont les nombres m et n tels que $m \times n = -10$ *et* $m + n = -3$ *? L'examen des différents facteurs de -10 offre la solution : (-5, 2). On a donc :*

$$x^2 - 5x + 2x - 10 = 0$$
$$x(x-5) + 2(x-5) = 0$$
$$(x-5)(x+2) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 5\,;x_2 = -2$$

Une autre technique de factorisation consiste à réaliser la « **complétion du carré** ». Le principe est de faire apparaître un carré sous forme d'une identité remarquable. La méthode peut être résumée de la sorte :

1. Mettre l'équation quadratique sous forme $x^2 + bx + c = 0$.
2. Compléter le carré en ajoutant $\pm\left(\frac{b}{2}\right)^2$ au terme en x et en le soustrayant du terme indépendant.
3. L'équation peut être réécrite sous forme d'un carré $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$ et donc factorisée.

Ceci peut se résumer par l'identité :

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)$$

Exemple :

Soit l'expression à factoriser : $2x^2 + 12x - 8 = 0$.
Nous réduisons à 1 *le coefficient du terme au carré en divisant tous les termes par* 2 *:*

$$x^2 + 6x - 4 = 0$$

Comparons-là à une expression présentant une identité remarquable :

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$

Idéalement, $2a$ *devrait être égal à* 6, *donc* $a = 3$.
L'identité remarquable serait donc, pour $a = 3$ *:*

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

Toutefois, notre terme indépendant n'est pas $+9$, *mais* -4.
Nous complétons donc le carré de notre équation en conséquence :

$$x^2 + 6x - 4 = (x + 3)^2 - 9 - 4$$
$$x^2 + 6x - 4 = (x + 3)^2 - 13$$

Ce qui nous permet de résoudre l'équation plus facilement :

$$(x + 3)^2 = 13$$
$$x = \pm\sqrt{13} - 3$$

Exercices :

Résolvez les équations suivantes par complétion du carré (et vérifiez en substituant les inconnues de l'équation de départ par les solutions trouvées).

(10.1.a) $x^2 - 6x + 9 = 0$
(10.1.b) $4x^2 + 12x + 9 = 0$
(10.1.c) $9x^2 - 12x + 4 = 0$
(10.1.d) $2x^2 + 5x = -3$

Poussant cette méthode plus avant, et en ne réduisant pas le terme au second degré au coefficient unité, nous pouvons déterminer une forme plus générale[21] :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - h)^2 + k}$$

avec $h = -\frac{b}{2a}$
et $k = c - \frac{b^2}{4a}$

[21] Nous reviendrons plus loin sur cette forme qui nous permettra par ailleurs de calculer le sommet de la courbe.

En résolvant cette équation en termes de $x - h$ et en réorganisant l'expression, nous obtenons l'équation générale de résolution des équations quadratiques :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Le dessous de la racine carrée est le discriminant (généralement noté Δ), car il permet de déterminer le nombre de racines de l'équation :

- 2 racines si $\Delta > 0$;
- 1 racine si $\Delta = 0$;
- aucune racine si $\Delta < 0$;

Cette formule, résultat d'une méthode générale (complétion du carré) est essentielle :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

avec :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Une autre démonstration de cette identité importante peut être proposée :

- Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
- Multiplions chaque membre par $4a$: $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$.
- Réarrangeons : $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$.
- Ajoutons b^2 à chaque membre : $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$.
- Appliquons l'identité remarquable : $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$.
- Appliquons la racine carrée : $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$.

- Et finalement : $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemple :

$$2x^2 + 3x - 1$$
$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 17$$

17 étant strictement supérieur à 0, nous pouvons continuer en utilisant la double formule :

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2 \times 2} = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \approx 0{,}28$$
$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2 \times 2} = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} \approx -1{,}78$$

Si les solutions de l'équation ont été apportées par une voie différente de la factorisation, ils nous ouvrent naturellement une voie royale pour atteindre cette dernière :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Exercices :

Résolvez les équations suivantes (et vérifiez en substituant les inconnues de l'équation de départ par les solutions trouvées).

(10.1.e) $(x + 1)(x - 4) = 0$

(10.1.f) $(x - 3)(x + 5) = 0$

(10.1.g) $x(x - 2) = 0$

(10.1.h) $3x(2x - 6) = 0$

(10.1.i) $(x - 8)^2 = 0$

(10.1.j) $5x^2 - 13x = 7x$

(10.1.k) $100x^2 = 25$

(10.1.l) $-5x^2 + 3{,}5x - 1 = -4$

(10.1.m) $-3x^2 + 8x - 10 = 0$

(10.1.n) $6x^2 + 2x = x + 4$

(10.1.o) $9x^3 + 100x = 60x^2$

Si les zéros de la fonction sont des valeurs essentielles, il existe une autre valeur dont le calcul se révèle souvent précieux : le **sommet** (ou **extremum**) de la parabole. En physique par exemple, cela nous donne l'altitude maximale d'un projectile.

En recherchant une formule générale de résolution des équations quadratiques, nous avons adopté une nouvelle forme que nous allons réutiliser ici : $y = a(x-h)^2 + k$ où h est l'abscisse du sommet et k son ordonnée. Nous allons nous attacher maintenant à calculer les coordonnées (h, k) du sommet.

1. Reprenons d'abord l'équation sous forme canonique :

$$y = ax^2 + bx + c$$

2. Factorisons a sur les deux premiers termes :

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

3. Ajoutons et soustrayons un terme dans la parenthèse :

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

4. Regroupons maintenant les termes :

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c$$

5. Factorisons par $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

6. Et réunissons les deux dernier termes :

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

En reprenant notre équation de départ $y = a(x-h)^2 + k$, nous identifions facilement les valeurs de k et de h, qui sont les coordonnées de l'extremum de la fonction.

$$k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$h = -\frac{b}{2a}$$

Enfin, tout comme une droite peut être définie dans le plan par deux points, une parabole peut être définie par trois points, ce qui devrait être intuitif puisque sa forme générale $y = ax^2 + bx + c$ admet trois coefficients. Trouver la fonction d'une parabole passant par trois points procède donc d'une méthode comparable à celle qui consiste à trouver la fonction d'une droite passant par deux points.

Exemple :

Nous désirons trouver la fonction de la parabole passant par les points $A(1,1)$, $B(2,3)$ *et* $C(4,-3)$.
Sa forme générale est $f(x) = ax^2 + bx + c$, *ce qui nous permet d'écrire les égalités suivantes :*

$$f(1) = ax^2 + bx + c = 1$$
$$f(2) = ax^2 + bx + c = 3$$
$$f(4) = ax^2 + bx + c = -3$$

que nous pouvons réécrire sous forme d'un système :

$$\begin{cases} a(1)^2 + b(1) + c = 1 \\ a(2)^2 + b(2) + c = 3 \\ a(4)^2 + b(4) + c = -3 \end{cases}$$

lequel se simplifie en un système de trois équations du premier degré à trois inconnues :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 16a + 4b + c = -3 \end{cases}$$

qui, après résolution, donne les valeurs $a = -\frac{5}{3}$ *;* $b = 7$ *;* $c = -\frac{13}{3}$, *La fonction de la parabole passant par ces trois points est donc* $f(x) = -\frac{5}{3}x^2 + 7x - \frac{13}{3}$.

10.2. Inéquations quadratiques

Nous avons préféré aborder ce chapitre sous l'angle fonctionnel, recherchant par exemple les racines de la fonction. À ce stade, le lien devrait être évident que la recherche de racines d'une fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ est similaire à la recherche des solutions d'une équation $y = ax^2 + bx + c$.

La résolution d'une inéquation quadratique suit la même logique que celle des inéquations linéaires vues plus haut, mais est rendue plus complexe par la forme parabolique de la courbe. Si l'examen du graphique peut apporter une réponse directe, une réponse plus précise, par calcul, sera nécessaire dans les cas où la courbe n'est pas visible, du moins avec le degré de détail voulu si elle est poche de la limite demandée.

1. Mettre l'inéquation sous sa forme canonique[22] $ax + bx + c > 0$ (ou $ax + bx + c < 0$).
2. Rechercher les racines du trinôme de gauche et le factoriser.
3. Dessiner un tableau indiquant le signe de chaque binôme et du trinôme de part et d'autre des racines.
4. Déterminer l'ensemble des valeurs qui sont solutions de l'inéquation.

[22] La forme canonique d'une équation est une représentation spécifique qui met l'équation dans une structure standardisée qui permet d'en voir clairement les caractéristiques importantes, facilitant ainsi son interprétation et sa résolution.

Exemple :

$$x^2 - 4x - 5 < 0$$

L'inéquation est déjà sous sa forme canonique. Nous en déduisons les racines :

$$x_1 = -1\,;x_2 = 5$$

Et nous le factorisons :

$$(x-5)(x+1) < 0$$

Nous dessinons alors un tableau des signes pour voir le comportement des deux binômes de part et d'autre de chaque racine :

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 5$	5	$x > 5$
$(x-5)$	-	-	-	0	+
$(x+1)$	-	0	+	+	+

Nous en déduisons l'évolution des signes pour l'expression de base en multipliant les lignes de chaque binôme :

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 5$	5	$x > 5$
$(x-5)$	-	-	-	0	+
$(x+1)$	-	0	+	+	+
$(x-5)(x+1)$	+	0	-	0	+

La dernière ligne nous donne l'ensemble des solutions de l'inéquation que nous pouvons réécrire :

$$]-\infty,-1[\,\cup\,]5,+\infty[$$

Exercices :

Résolvez les inéquations quadratiques suivantes.

(10.2.a) $x^2 - 4x > -5$

(10.2.b💡) $2x^2 - 5x \leq 3$

10.3. Équations cubiques

Une **équation cubique** est une équation polynomiale de degré 3 de la forme :

$$\boxed{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0)}$$

En posant $x = z - \frac{b}{3a}$, on peut donner à cette équation une **forme réduite** qui facilitera certains traitements :

$$z^3 + pz + q = 0$$

Le discriminant Δ d'une équation cubique se définit par la formule suivante :

$$\Delta = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2$$

Ou, sous sa forme réduite :

$$\Delta = -4p^3 - 27q^2$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation possède 3 racines réelles distinctes ;
- Si $\Delta = 0$, elle possède une racine double ou triple et toutes ses racines sont réelles ;
- Si $\Delta < 0$, elle possède trois racines distinctes, dont une réelle et deux complexes conjugués.

Il est possible que la résolution d'une équation cubique puisse être obtenue par une technique déjà abordée comme la factorisation.

À ce titre, notons que les identités remarquables binomiales de degré 2 peuvent être projetées dans des dimensions supérieures. On démontre par simple développement les identités suivantes en degré 3 :

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

De même en degré 4 :

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

Cette progression peut se généraliser à tout degré n à l'aide de la **formule du binôme** :

$$(a \pm b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\right) a^{n-k}(\pm b)^k$$

Il est tout aussi possible de projeter la troisième identité remarquable du deuxième degré :

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2)$$

Ici aussi, une généralisation est possible par la **formule de Bernouilli** :

$$a^n \pm b^n = (a \pm b) \sum_{k=0}^{n-1} (\pm 1)^k a^{(n-1-k)} b^k$$

Exemple :

$$\begin{gathered} x^3 - x^2 - 9x - 9 = 0 \\ x^2(x-1) - 9(x-1) = 0 \\ (x^2 - 9)(x-1) = 0 \\ (x-3)(x+3)(x-1) = 0 \end{gathered}$$

$$x_1 = 3\,; x_2 = -3; x_3 = 1$$

Si les factorisations ne sont d'aucune aide, il convient d'envisager une méthode générale de résolution. De celles disponibles, nous n'exposons ici que celle de Cardan[23]. Elle n'est pas la plus simple, mais sa connaissance pourra être mise à profit par le lecteur lorsqu'il abordera les structures algébriques plus complexes. Elle peut se résumer en cinq étapes[24] :

1. Réécrire le cas échéant l'équation sous sa forme canonique : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
2. La réécrire ensuite sous forme réduite en posant $x = z - \frac{b}{3a}$: $z^3 + pz + q = 0$.
3. Calculer le discriminant $\Delta = -4p^3 - 27q^2$.
4. Définir une constante $j = e^{2i\pi/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
5. Les solutions complexes z_k avec $0 \leq k \leq 2$ sont données par :

$$z_k = u_k + v_k$$

avec :

$$u_k = j^k.\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q + \sqrt{\frac{-\Delta}{27}}\right)}$$

et :

$$v_k = j^{-k}.\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q - \sqrt{\frac{-\Delta}{27}}\right)}$$

---

23 Dont la paternité revient en fait à Scipione del Ferro.

24 Nous renvoyons le lecteur à un traité d'algèbre intermédiaire pour en connaître les mécanismes fins.

Exemple :

Soit l'équation sous forme canonique $6x^3 - 6x^2 + 12x + 7 = 0$.
Divisons par 6 *afin de la normaliser :*

$$x^3 - x^2 + 2x + \frac{7}{6} = 0$$

Nous trouvons sa forme réduite en posant $x = z - \frac{b}{3a} = z - \frac{1}{3}$ *:*

$$\left(z - \frac{1}{3}\right)^3 - \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(z - \frac{1}{3}\right) + \frac{7}{6} = 0$$

Après développements et simplifications, nous obtenons :

$$z^3 + pz + q = 0$$

avec :

$$p = -\frac{2}{3}\ ; q = -\frac{13}{18}$$

Calculons maintenant le discriminant :

$$\Delta = -4p^3 - 27q^2 = \frac{635}{108}$$

Puisque $\Delta > 0$*, nous avons 3 racines que nous pouvons rechercher en appliquant les formules de Cardan avec* $0 \leq k \leq 2$. *En arrondissant à 3 décimales, nous obtenons :*

$$z_0 \approx -0{,}665$$
$$z_1 \approx 1{,}496 - 1{,}155i$$
$$z_2 \approx 1{,}496 + 1{,}155i$$

Nous remarquons que z_0 *est la seule racine réelle et que les racines complexes* z_1 *et* z_2 *sont conjuguées.*

Notons qu'il existe des formes particulières d'équations cubiques dont la résolution est plus simple. Par exemple, une équation de la forme $x^3 + ax = b$ aura pour solution :

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Exercices :

Trouvez les racines des équations cubiques suivantes :

(10.3.a) $x^3 + 5x^2 + 3x - 4 = 0$

(10.3.b) $x^3 + 3x^2 + x + 3 = 0$

10.4. Équations quartiques

Enfin, les **équations quartiques** sont des équations polynomiales du quatrième degré ayant la forme canonique suivante :

$$\boxed{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0}$$

avec $a \neq 0$.

La résolution directe de l'équation quartique peut être effectuée en utilisant des méthodes algébriques telles que la substitution ou la factorisation. Cependant, ces méthodes peuvent être fastidieuses et complexes en raison du degré élevé de l'équation, c'est pourquoi il convient avant tout d'examiner si ces équations ne présentent pas une forme particulière permettant l'utilisation de techniques spécifiques.

La première de ces techniques s'applique aux **équations bicarrées** de la forme :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Ces équations se résolvent par un simple changement de variable $X = x^2$ qui leur donne la forme d'une équation quadratique $aX^2 + bX + c = 0$ que l'on résout facilement avant de réinstaurer la variable initiale.

Un autre cas particulier concerne les **équations symétriques** de type :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

Ici encore, un changement de variable $X = x + \frac{1}{x}$ nous ramènera à une équation quadratique simple à résoudre.

Pour les cas plus généraux, les méthodes de Descartes, de Ferrari ou de Lagrange utilisent des techniques assez similaires, et comparables à la méthode de Cardan examinée dans le cadre des équations cubiques. Nous allons ici examiner la **méthode de Ferrari** dont les démonstrations font appel à des éléments d'algèbre ou de géométrie intermédiaire.

Soit l'équation :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Il convient avant tout de la diviser par a et d'opérer un changement de variable : $x = y - \frac{b}{4a}$ afin d'obtenir une équation réduite de la forme :

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0$$

avec :

$$\begin{cases} p = \dfrac{c}{a} - \dfrac{3b^2}{8a^2} \\ q = \dfrac{d}{a} - \dfrac{bc}{2a^2} + \dfrac{b^3}{8a^3} \\ r = \dfrac{e}{a} - \dfrac{bd}{4a^2} + \dfrac{cb^2}{16a^3} - \dfrac{3b^4}{256a^4} \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant résoudre l'équation substituée en posant $z = y^2$:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \Rightarrow z^2 + pz + q = 0$$

La résolution de cette équation quadratique mène à des racines z_1 et z_2 qui sont fonctions de p et de q, ce qui permet de récupérer des solutions en y :

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{z_1}$$
$$y_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$$

En utilisant l'identité $x = y - \frac{b}{4a}$, on peut récupérer les solutions en x :

$$x_1 = \sqrt{z_1} - \frac{b}{4a}$$
$$x_2 = -\sqrt{z_1} - \frac{b}{4a}$$
$$x_3 = \sqrt{z_2} - \frac{b}{4a}$$
$$x_4 = \sqrt{z_2} - \frac{b}{4a}$$

Chacune de ces solutions doit enfin être simplifiée autant que possible en fonction des coefficients a, b, c et d.

Selon les coefficients de l'équation, la méthode de Ferrari peut conduire à des expressions lourdes et complexes. Elle est souvent utilisée dans des cas spécifiques où d'autres méthodes sont impraticables. En fait, pour résoudre une équation quartique, des méthodes numériques ou des outils informatiques sont généralement plus efficaces.

10.5. Équations de degrés supérieurs

Il n'existe pas de formule générale pour résoudre une équation de degré 5 ou supérieur[25]. Il ne s'agit pas là d'une limite technique, mais d'une impossibilité théorique. Par conséquent, leur résolution fait généralement appel à une approche numérique ou à des outils qui dépassent largement la portée de ce précis[26]. Pourtant, certaines équations spécifiques offrent des possibilités relativement simples de

[25] Théorème d'Abel-Rufini

[26] Groupes de Galois, équations elliptiques, méthode de Bring…

résolution par factorisation. Il importe donc de vérifier que l'on ne se trouve pas dans pareil cas avant de baisser les bras.

Exemple :

Soit l'équation $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 4x - 2 = 0$.
La recherche de solutions évidentes montre rapidement que 1 *est une racine de l'équation. Par conséquent,* $x - 1$ *est un facteur de cette équation.*
En procédant à la division de $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 4x - 2 = 0$ *par* $x - 1$, *nous obtenons la factorisation suivante :*

$$(x - 1)(x^4 - 4x^3 + x^2 + 4x + 2) = 0$$

Nous avons donc la première racine $x_1 = 1$. *Les autres racines s'obtiendront par résolution du facteur au 4e degré selon la méthode exposée au chapitre précédent.*

10.6. Approximation polynomiale de fonctions

Les **approximations polynomiales de fonctions** permettent de représenter des fonctions complexes par des polynômes plus simples, facilitant ainsi leur analyse et leur manipulation. Ces outils mathématiques sont puissants et très largement utilisés dans des domaines tels que la physique, l'ingénierie, l'informatique, l'économie et bien d'autres.

Imaginons une fonction complexe, avec ses courbes et ses comportements changeants. Parfois, ces fonctions peuvent être difficiles à comprendre et à travailler. Les approximations polynomiales permettent de simplifier ces fonctions en les représentant par des polynômes, qui sont des expressions que l'algèbre élémentaire peut traiter.

De nombreuses approches existent[27], ayant chacune ses avantages et étant chacune adaptée à des contextes spécifiques en fonction des propriétés de la fonction à approximer et des exigences de l'application.

Nous ne présenterons ici que l'approximation de Lagrange pour son caractère intuitif et l'absence de prérequis avancés. Elle consiste à utiliser un polynôme de degré inférieur ou égal au degré de la fonction pour minimiser les écarts entre la fonction réelle et le polynôme aux points d'interpolation spécifiés.

Pour approximer une fonction $f(x)$ à partir de $n+1$ points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, l'interpolation de Lagrange est donnée par la formule suivante :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \times \prod_{j=0}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Les points doivent être judicieusement choisis en fonction de l'application désirée. En outre, plus le nombre de points d'interpolation sera élevé, plus l'approximation sera précise.

Exemple :

Soit la fonction $f(x) = sin\ (x)$ *dont les trois points :*

$$\begin{cases} (x_0, y_0) = (0,0) \\ (x_1, y_1) = (\frac{\pi}{2}, 1) \\ (x_2, y_2) = (\pi, 0) \end{cases}$$

Les produits de Lagrange sont :

[27] Interpolation de Newton, interpolation d'Hermite, méthode des moindres carrés, régression polynomiale…

$$\begin{cases} L_0(x) = \dfrac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)}{\left(0-\frac{\pi}{2}\right)(0-\pi)} = \dfrac{2x(x-\pi)}{\pi^2} \\ L_1(x) = \dfrac{(x-0)(x-\pi)}{\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)} = -\dfrac{4x(x-\pi)}{\pi^2} \\ L_2(x) = \dfrac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{(\pi-0)\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{2x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi^2} \end{cases}$$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange $P(x)$ *est donné ici par :*

$$P(x) = y_0 \times L_0(x) + y_1 \times L_1(x) + y_2 \times L_2(x)$$

Soit, après substitution des valeurs et simplification :

$$P(x) = -\frac{4x^2}{\pi} + \frac{5x}{\pi}$$

Cette approximation est bien peu satisfaisante : nous n'avons travaillé que sur trois points pour ne pas alourdir notre exemple. Le lecteur opiniâtre pourra évaluer l'évolution de la précision en utilisant un nombre croissant de points

11. ÉQUATIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES

Les **équations exponentielles et logarithmiques** apparaissent naturellement dès qu'une variable se glisse là où on l'attend le moins : tantôt comme exposant, tantôt comme base, ou lorsque l'on cherche à « remonter le temps » d'un phénomène décrit par une croissance exponentielle. Elles surgissent ainsi spontanément dans l'étude des intérêts composés, des populations, de la radioactivité ou encore des algorithmes informatiques.

Ce chapitre a pour objectif de présenter variétés riches et étranges, d'en étudier les propriétés essentielles, puis de développer des méthodes systématiques pour résoudre les équations qui les mettent en jeu. Introduites progressivement à partir de leurs rôles inverses respectifs, ces fonctions ont longtemps représenté une avancée conceptuelle majeure, notamment lorsque les logarithmes ont permis, avant l'ère des calculatrices, de transformer des multiplications fastidieuses en additions bien plus maniables.

Une attention particulière sera portée aux conditions de définition, aux changements de forme algébrique et aux restrictions nécessaires pour garantir la validité des solutions. Ces précautions sont ici encore essentielles : une manipulation apparemment innocente peut rapidement conduire à une solution élégante… ou parfaitement fausse.

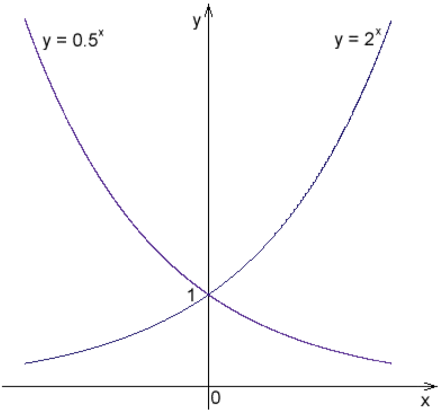
11.1. La fonction exponentielle

La **fonction exponentielle** de base se définit comme suit :

$$\boxed{f(x) = b^x}$$

où b est un nombre strictement positif, différent de 1.

Le domaine de toute fonction exponentielle de base est l'ensemble de tous les nombres réels $(-\infty, \infty)$ et son asymptote correspond à l'axe des *x*.



Elle peut bien sûr être élargie à sa forme canonique :

$$f(x) = a.b^{c(x-h)} + k$$

Son asymptote horizontale aura pour équation $y = k$ et elle aura un zéro si $a > 0 \cup k < 0$ ou si $a < 0 \cup k > 0$.

Si $a > 0$ et $c > 0$, l'image sera définie dans $]k, +\infty[$; si $a < 0$ et $c < 0$, l'image sera définie dans $]-\infty, k[$.

11.2. La fonction logarithmique

Si nous définissions :

p = la puissance ;

b = la base ;

e = l'exposant.

Alors nous pouvons définir une fonction log telle que :

$$\boxed{p = b^e \Leftrightarrow e = log_b\, p}$$

Par convention, lorsque la base du logarithme n'est pas indiquée, elle vaut 10 :

$$logx \Leftrightarrow log_{10}x$$

Nous l'avons vu, lorsque la base du logarithme est $e = 2{,}718281\ldots$, le logarithme est dit népérien et se note $\ln x$:

$$lnx \Leftrightarrow log_e x$$

Par conséquent :

$$\boxed{e^{lnx} = x}$$

La définition du logarithme implique que sa base est positive et différente de 1 et que son argument (ci-dessus noté p) soit strictement positif.

Exemple :

Calculer la valeur suivante :

$$log_3 27$$

Autrement dit, à quel exposant doit-on élever la base 3 pour obtenir 27 ?

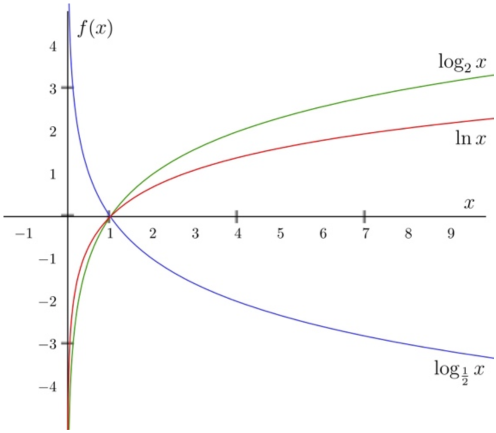
$$log_3 27 = 3$$

La fonction logarithmique par conséquent est la réciproque de la fonction exponentielle avec laquelle elle partage de nombreuses similitudes. La fonction logarithmique de base se définit comme suit :

$$f(x) = \log_b x$$

où $b > 0$, $b \neq 1$ et $x > 0$

Le domaine de toute fonction logarithmique de base est l'intervalle $]0, \infty[$, son image est $\mathbb{R}$ et son asymptote correspond à l'axe des *y*.



La fonction est décroissante si $0 < b < 1$ et croissante si $b > 1$.

Elle possède toujours un zéro.

Il est possible de l'élargir, elle aussi, à sa forme canonique :

$$f(x) = a\ \log_b\big(c(x-h)\big) + k$$

Son asymptote verticale aura pour équation $x = h$.

La fonction logarithme népérien étant la réciproque de la fonction exponentielle, il est toujours possible d'exprimer un logarithme sous une forme exponentielle.

Exemple :

$$log_6 \sqrt{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$$

Les propriétés algébriques du logarithme découlent directement de sa définition comme inverse de l'exponentielle. Pour tout $x > 0$ et $y > 0$, on a notamment :

$$log_b(xy) = log_b x + log_b y$$

$$log_b(x/y) = log_b x - log_b y$$

$$log_b b = 1$$

$$log_b 1 = 0$$

$$log_b b^n = n$$

$$log_b x^n = n\, log_b x$$

Une propriété importante permet de changer de base de logarithme :

$$log_b x = \frac{log_a x}{log_a b}$$

En outre, la valeur particulière de la constante d'Euler $e = 2{,}7182818284$ ... implique que :

$$ln(e) = 1$$

Exercices :

(11.2.a 💡) Réécrire $\log_3(5) + \log_3(8) - \log_3(2)$ comme un logarithme unique.

(11.2.b 💡) Réécrire $\ln \frac{x^4 y}{7}$ comme une somme ou différence de logarithmes.

(11.2.c 💡) Retranscrire $\log_5 3$ sous forme d'un logarithme népérien.

(11.2.d) Réécrire $\ln(6x^9) - \ln(3x^2)$ sous forme d'un logarithme unique.

11.3. Équations exponentielles et logarithmiques

La résolution d'équations exponentielles et logarithmiques nécessite de connaître parfaitement les propriétés de ces deux fonctions afin de pouvoir aisément réaliser les conversions nécessaires à obtenir une égalité évidente.

Une stratégie prioritaire sera d'arriver à obtenir une égalité du type $a^n = a^m$, c'est-à-dire de poser une base commune entre les deux membres permettant de déduire $m = n$, ou une égalité de type $a^n = b^n$, permettant de déduire $a = b$ ou $a = \pm b$.

Pour les équations logarithmiques, des restrictions devront en outre être préalablement posées afin de s'assurer que l'argument d'un logarithme soit strictement supérieur à 0. Ensuite, il convient de réduire l'expression et de la traduire sous forme exponentielle.

Exemple 1 :

$$\begin{gathered}
2^{x+1} = 3^{x-1} \\
log\, 2^{(x+1)} = log\, 3^{(x-1)} \\
(x+1)\, log\, 2 = (x-1)\, log\, 3 \\
x\, log\, 2 + log\, 2 = x\, log\, 3 - log\, 3 \\
x\, log\, 2 - x\, log\, 3 = -\, log\, 3 - log\, 2 \\
x\, log\, 3 - x\, log\, 2 = log\, 3 + log\, 2 \\
x\, log\frac{3}{2} = log(3 \times 2) \\
x = \frac{log\, 6}{log\left(\frac{3}{2}\right)} \approx 4{,}419
\end{gathered}$$

Exemple 2 :

$$log_2(x+2)=4$$

Nous posons avant tout la restriction $x>-2$ *et traduisons l'équation sous sa forme exponentielle :*

$$x+2=2^4$$
$$x=14$$

La solution est acceptable puisque $14>-2$.

Exemple 3 :

$$log(x-3)=log(6x)$$

Nous posons avant tout les restrictions suivantes :

$x>3$ *et* $x>0$ *(Cette dernière condition peut toutefois être négligée, étant incluse dans la première.)*

Nous réduisons l'équation :

$$log(x-3)-log(6x)=0$$
$$log\left(\frac{x-3}{6x}\right)=0$$

Nous traduisons ensuite l'équation sous sa forme exponentielle :

$$log_{10}\left(\frac{x-3}{6x}\right)=0$$
$$\frac{x-3}{6x}=10^0$$
$$\frac{x-3}{6x}=1$$
$$x-3=6x$$
$$x=-0{,}6$$

Mais $-0{,}6<3$ *! Cette équation n'a donc aucune solution !*

Exercices :

Résoudre les équations suivantes.

(11.3.a) $\log_6(x-1)+\log_6(x)=1$

(11.3.b) $2^{5x}=\sqrt{2}$

(11.3.c 💡) $e^{2x} - e^x = 56$
(11.3.d 💡) $\ln(-3x) = \ln(x^2 - 6x)$
(11.3.e 💡) $\frac{3}{\log_2 10} - \log(x - 9) = \log 44$

11.4. Équations transcendantes et « fonction » de Lambert

La fonction de Lambert est introduite ici comme une ouverture théorique, car sa manipulation effective dépasse le cadre de ce précis. Les exemples présentés visent uniquement à illustrer son principe et son utilité conceptuelle.

Une **équation transcendante** contient une **fonction transcendante**, c'est-à-dire une fonction qui ne peut être exprimée en termes finis d'addition, de soustraction, de multiplication, de division et de racine carrée de nombres rationnel. Leurs méthodes de résolution dépendent de la nature spécifique de l'équation et des fonctions transcendantes impliquées.

La **fonction *W* de Lambert**[28] a été conçue afin de résoudre certaines de ces équations. Elle est définie comme la réciproque de la fonction complexe $f(w) = we^w$, c'est-à-dire :

$$\boxed{z = we^w \Leftrightarrow w = W(z)}$$

ou

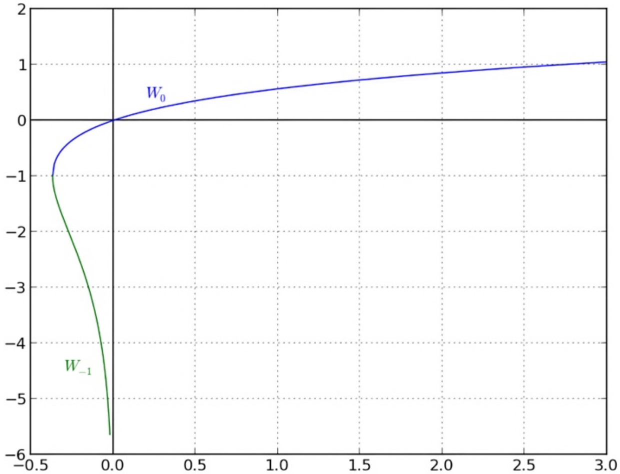
$$\boxed{W(we^w) = w}$$

Il s'ensuit une propriété importante :

$$\boxed{W(z).e^{W(z)} = z}$$

28 Se lit « fonction Omega de Lambert ».

Senso strictu, $W(z)$ n'est pas une fonction[29] puisqu'elle peut renvoyer, dans certains domaines, à une infinité de valeurs complexes. Dans l'ensemble ℝ des réels, $W(x)$ renvoie à deux valeurs[30] $\forall x < 0$ disposées sur deux branches notées W_0 et W_{-1} :



Le calcul de la valeur de W_0 et de W_{-1} est complexe et monopolise des outils qui sortent du cadre de ce précis. Si une valeur numérique est requise, nous conseillons le recours à des applications de calcul.

Exemple :

> *Soit l'équation* $x^x = 2$ *à laquelle nous cherchons à donner une forme* xe^x *pour profiter de l'identité* $W(xe^x) = x$.
> *Prenons le logarithme :* $lnx^x = ln2$
> *et simplifions :* $xlnx = ln2$.
> *Nous savons désormais que* $x = e^{lnx}$.

---

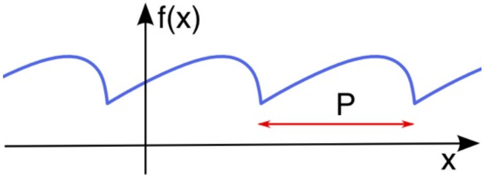
29 On parle parfois de « fonction multivaluée ».

30 À l'exception notable de la borne inférieure du domaine.

Nous pouvons donc réécrire : $e^{lnx}lnx = ln2$ *ou* $lnx.e^{lnx} = ln2$.
Nous avons dès lors la forme qui nous permet d'utiliser la fonction W *de Lambert que nous appliquons aux deux membres :* $W(lnx.e^{lnx}) = W(ln2)$.
Résolvons le premier membre : $lnx = W(ln2)$
Exponentions : $e^{lnx} = e^{W(ln2)}$
Et pouvons résoudre le premier membre pour obtenir $x = e^{W(ln2)}$.
Le recours à une application de calcul numérique nous donne une valeur de $x \approx 1{,}5596$.

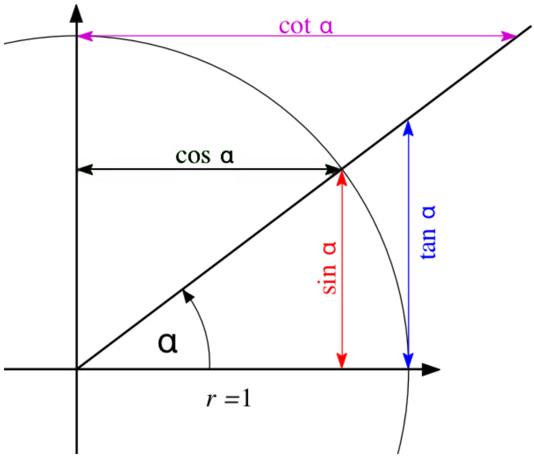
12. FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Une **fonction périodique** est une fonction dont les valeurs se répètent à intervalles réguliers. Graphiquement, son graphe est constitué d'un motif qui se reproduit indéfiniment. La plus petite longueur P correspondant à cette répétition est appelée **période**.



Les **fonctions trigonométriques** sont généralement les premières fonctions périodiques étudiées. Leur périodicité est intimement liée à la nature cyclique des cercles et des angles. Les angles complets ($360°$ ou 2π radians) représentent un tour complet autour du cercle. Ainsi, pour toute fonction trigonométrique, lorsque l'angle atteint un tour complet, la fonction revient à sa valeur initiale, créant ainsi un motif périodique. Ces fonctions modélisent les relations entre les angles et les côtés des triangles et sont largement utilisées en mathématiques, en sciences naturelles et en ingénierie.

Pour rappel, voici le cercle qui permet de situer les fonctions trigonométriques de base (sinus, cosinus, tangente et cotangente) exprimées en fonction de l'angle α, que nous choisirons par la suite d'exprimer en radians ($2\pi = 360°$) :



12.1. Formules trigonométriques de base

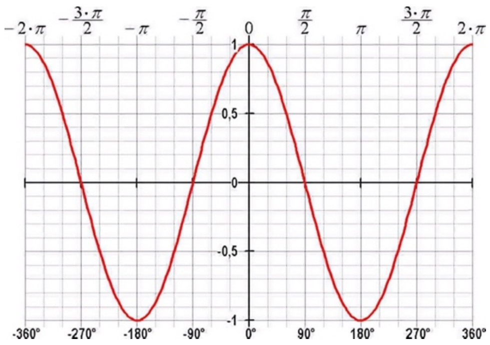
Ces quatre fonctions entretiennent entre elles de nombreuses identités pour simplifier des expressions trigonométriques, résoudre des équations trigonométriques, et travailler avec des fonctions trigonométriques dans divers contextes mathématiques et scientifiques. En voici les essentielles…

Pythagoriciennes
$sin^2(x) + cos^2(x) = 1$
$1 + tan^2(x) = sec^2(x)$
$1 + cot^2(x) = csc\,^2(x)$
Opposés d'un angle
$sin(-x) = -sin(x)$
$\cos(-x) = \cos\,(x)$

$tan(-x) = -tan\,(x)$
$cot(-x) = -cot(x)$
Complémentaires
$sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
$cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sin(x)$
$tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cot(x)$
$cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = tan(x)$
Sommes et différences
$sin(a \pm b) = sin(a)\,cos(b) \pm cos(a)\,sin(b)$
$cos(a \pm b) = cos(a)\,cos(b) \pm sin(a)\,sin(b)$
$tan(a \pm b) = \frac{tan(a) \pm tan(b)}{1 \pm tan(a)\,tan(b)}$
Doubles angles
$sin(2x) = 2\,sin(x)\,cos(x)$
$cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x)$
$cos(2x) = 2\,cos^2(x) - 1$
$cos(2x) = 1 - 2sin^2(x)$
$tan(2x) = \frac{2tan(x)}{1 - tan^2(x)}$
Demi-angles
$sin^2(x) = \frac{1 - cos(2x)}{2}$
$cos^2(x) = \frac{1 + cos(2x)}{2}$

$tan^2(x) = \dfrac{1 - cos(2x)}{1 + cos(2x)}$
Produits en sommes
$sin(a)\, sin(b) = \dfrac{1}{2}[cos(a - b) - cos(a + b)]$
$cos(a)\, cos(b) = \dfrac{1}{2}[cos(a - b) + cos(a + b)]$
$sin(a)\, cos(b) = \dfrac{1}{2}[sin(a + b) + sin(a - b)]$
Sommes en produits
$sin(a) + sin(b) = 2sin\left(\dfrac{a + b}{2}\right) cos(\dfrac{a - b}{2})$
$sin(a) - sin(b) = 2cos\left(\dfrac{a + b}{2}\right) sin(\dfrac{a - b}{2})$
$cos(a) + cos(b) = 2cos\left(\dfrac{a + b}{2}\right) cos\,(\dfrac{a - b}{2})$
$cos(a) - cos(b) = -2sin\left(\dfrac{a + b}{2}\right) sin(\dfrac{a - b}{2})$

En faisant varier l'amplitude de l'angle α, nous comprenons que, après avoir parcouru le cercle, il reviendra à sa position initiale, initiant une périodicité. Ainsi, la fonction $\cos(\alpha)$ décrira une sinusoïde d'une périodicité de 2π radians.



La forme générale de la fonction cosinus est dès lors :

$$y = A\,cos(Bx - C) + D$$

D'une façon similaire aux graphes d'équations vues préalablement, les variations de C et D provoqueront respectivement une translation horizontale et verticale de la courbe.

A détermine l'**amplitude** de la courbe, en manière telle que l'on peut écrire la relation suivante :

$$|A| = \frac{(y_{max} - y_{min})}{2}$$

B détermine quant à lui la **périodicité** de la courbe qui permet d'écrire la relation suivante :

$$\mathrm{P} = \frac{2\pi}{|\mathrm{B}|}$$

Exercices :

Déterminez les extrema, l'amplitude et la périodicité des courbes suivantes.

(12.2 a 💡) $f(x) = -4\sin(x) + 2$

(12.2 b💡) $f(x) = 3\sin(2x-1)+1$

La notion de périodicité confère des propriétés particulières aux équations trigonométriques, notamment qu'elles peuvent avoir une infinité de solutions.

Leur résolution implique avant tout de connaître certaines valeurs remarquables afin de pouvoir identifier des solutions évidentes :

α	**0**	$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	$\boldsymbol{\pi}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\rightarrow \pm\infty$	0

D'autres valeurs remarquables pourront directement être inférées du tableau ci-dessus, par exemple pour les valeurs analogues entre π et 2π.

Exemple :

$$sin\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Le tableau des valeurs remarquables nous montre que $\theta = \frac{\pi}{4}$ *est solution de l'équation. Toutefois, le graphique de la courbe nous montre qu'elle est symétrique par rapport à* $\frac{\pi}{2}$*, de telle manière que* $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$ *est une autre solution de l'équation. Enfin, la périodicité de cette dernière complète ces deux solutions particulières d'une infinité de solutions se répétant selon la période* 2π*.*

L'ensemble des solutions est donc :

$$\left\{\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right\} \text{ où } n \in \mathbb{Z}$$

Exercices :

Résolvez les équations suivantes.

(12.2.c💡) $sin\frac{\theta}{3} = \frac{1}{2}$

(12.2.d💡) $-sin\,\theta - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ dans $[0, 4\pi]$

(12.2.e💡) $tan2\theta = 1$

(12.2.f💡) $sin\theta + cos\theta = 1$

12.2. Fonctions trigonométriques additionnelles

Les fonctions trigonométriques de base sont essentielles pour étudier les triangles et les mouvements périodiques ; cependant, elles ne couvrent pas l'ensemble du spectre des relations trigonométriques. Pour aborder ces lacunes, nous introduisons trois fonctions trigonométriques additionnelles, à savoir la **cosécante** (csc), la **sécante** (sec) et la **cotangente** (cot) qui se définissent respectivement comme les inverses des fonctions de base :

$$csc(\alpha) = \frac{1}{sin(\alpha)}$$

$$sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)}$$

$$cot(\alpha) = \frac{1}{tan(\alpha)} = \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$$

Ces fonctions ne sont définies que pour les valeurs de x pour lesquelles les fonctions correspondantes ne s'annulent pas.

Note

> *Contrairement à ce que leurs noms pourraient laisser soupçonner (sinus hyperbolique, etc.), les* ***fonctions hyperboliques*** *ne ressortent pas de la trigonométrie, mais de leur relation avec la courbe hyperbolique d'équation* $x^2 - y^2 = 1$*. Elles sortent du cadre de ce précis. Notons aussi que l'on peut trouver en navigation maritime ou aérienne des fonctions trigonométriques spécifiques telles que exsécante, haversine ou sinus verse que l'on n'utilise guère en algèbre.*

12.3. Fonctions trigonométriques inverses

Les **fonctions trigonométriques inverses** sont essentielles dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique, car elles permettent de déterminer les angles associés à des rapports trigonométriques donnés. Bien que les fonctions trigonométriques ne soient pas bijectives, elles le deviennent si l'on prend la précaution d'exclure certaines valeurs. Chaque fonction trigonométrique inverse a un domaine de définition restreint pour garantir qu'elle soit bijective et ait une plage de valeurs appropriée. Ainsi, à chaque fonction trigonométrique $f(\theta) = x$ exprimant une valeur en fonction d'un angle, nous avons la fonction inverse $f^{-1}(x) = \theta$ exprimant l'angle en fonction de la valeur.

Ces fonctions s'expriment en préfixant la fonction de base par « arc » : arcsinus, arccosinus, arctangente… Elles se notent parfois de façon similaire : $arcsin(x)$, $arccos(x)$, $arctan(x)$, mais nous préférons utiliser une notation tout aussi fréquente, mais qui est cohérente avec la notation des fonctions inverses : $sin^{-1}(x)$, $cos^{-1}(x)$, $tan^{-1}(x)$…

Il se déduit pour chaque fonction trigonométrique inverse une propriété évidente, par exemple, pour tout x dans le domaine approprié :

$$sin(sin^{-1}(x)) = x$$

De très nombreuses identités peuvent être inférées de la définition de ces fonctions et des identités préalablement présentées. Nous n'en présentons que les identités de complémentarité dont les symétries permettent une mémorisation facile :

$$sin^{-1}(x) + cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$tan^{-1}(x) + cot^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$$

13. NOMBRES COMPLEXES

Les nombres complexes prolongent les nombres réels par l'introduction d'une unité imaginaire i dont le carré vaut -1. Cette idée, qui a longtemps paru hérétique et dont nous avions interdit l'usage, est non seulement possible, mais incontournable. Elle permet de résoudre des équations algébriques dépourvues de solutions réelles et d'unifier de nombreuses méthodes mathématiques qui, sans elle, resteraient éparses.

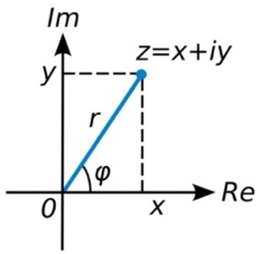
Dans ce chapitre, nous introduirons les représentations trigonométrique et polaire des nombres complexes, le calcul des puissances et des racines complexes, ainsi que certaines extensions comme le logarithme complexe. Ces outils, développés notamment au XVIIIe siècle par Euler et ses contemporains, offrent une manière étonnamment élégante de faire dialoguer calcul algébrique et géométrie plane.

L'accent sera mis sur les méthodes effectives de calcul et sur l'interprétation géométrique dans le plan complexe. Les notions plus avancées seront clairement signalées comme des prolongements théoriques. Quant aux nombres complexes eux-mêmes, ils finiront sans doute par perdre leur caractère « imaginaire » pour devenir in ne peut plus concrets.

13.1. Forme trigonométrique des nombres complexes

Le **forme trigonométrique** est une manière élégante de représenter des nombres complexes en utilisant des éléments de trigonométrie. Imaginons que nous ayons un nombre complexe z. En utilisant des idées de trigonométrie, nous pouvons décomposer

z en deux parties : son **module** (ou magnitude), qui représente sa distance du point d'origine dans le plan complexe, et son **argument**, qui représente l'angle que la ligne reliant z à l'origine fait avec l'axe des réels.



où :

- $z = x + iy$ est le nombre complexe.
- r est son module $r = |z|$, toujours positif puisqu'il s'agit de la distance à l'origine.
- φ est l'argument, souvent aussi noté θ, que nous calculerons par la suite en radians.
- Im est l'axe imaginaire et Re est l'axe réel.

En combinant le module et l'argument, nous pouvons représenter un nombre complexe z dans ce qu'on appelle sa forme trigonométrique :

$$z = r(cos(\theta) + i\ sin\ (\theta))$$

Ce changement de paradigme permet d'utiliser des outils trigonométriques afin de simplifier des opérations autrement fastidieuses sur les nombres complexes.

Les nombres complexes peuvent aussi être représentés de façon plus compacte sous une forme polaire dont il existe deux versions :

$$z = (r, \theta)$$

Et :

$$\boxed{z = r\angle\theta}$$

La **formule de Moivre** affirme que, pour tout nombre réel θ et pour tout entier relatif n,

$$\boxed{(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)^n = cos(n\theta) + i\,sin\,(n\theta)}$$

Autrement dit, pour un nombre complexe z :

$$\boxed{z^n = r^n(cos(n\theta) + i\,sin\,(n\theta))}$$

Ceci va simplifier radicalement le calcul des puissances de nombres complexes exprimés sous forme polaire.

En remplaçant n par i, cette formule permet de démontrer[31] l'une des plus fameuses identités des mathématiques, sur laquelle nous reviendrons ultérieurement, l'**identité d'Euler** :

$$\boxed{e^{i\theta} = cos(\theta) + i\,sin(\theta)}$$

Ou, en particulier si $\theta = \pi$:

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$$
$$e^{i\pi} = -1 + i.0$$

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

[31] Cette démonstration est peu intéressante et fait appel aux fonctions hyperboliques. Nous lui préférons la démonstration que nous détaillerons par la suite dans le chapitre sur les Suites et Séries.

13.2. Conversion entre la forme cartésienne et polaire.

Soit $z = x + iy$. Pour passer de cette forme cartésienne à la forme polaire, on calcule d'abord le module par Pythagore :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Puis l'argument est calculé en convoquant les identités trigonométriques de base :

Si $x > 0$:

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Si $x < 0$:

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$$

Nous avons alors tous les éléments pour rédiger la forme polaire $z = r(cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

Le passage de la forme polaire à la forme cartésienne est plus simple.

Soit $z = r(cos(\theta) + i\sin(\theta))$, nous calculons :

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$

afin de réécrire la forme cartésienne $z = x + iy$.

Exemple :

Soit $z = 3 + 4i$. *Calculer* z^4.

D'abord déterminer la forme polaire de z *:*

$$r = |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Ensuite déterminer l'argument :

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

Avec cette valeur de θ, nous pouvons exprimer z sous forme polaire :

$$z = 5(cos(\theta) + i\ sin\ (\theta))$$

À présent, nous appliquons simplement la formule de puissance :

$$z^4 = 625(cos(4\theta) + i\ sin\ (4\theta))$$

Enfin, nous pouvons éventuellement revenir à une forme cartésienne en calculant les valeurs de x et de y selon les identités exprimées ci-dessus :

$$z^4 = 256 - 3072i$$

Exercices :

(13.2.a💡) Écrivez $z = -3 + 4i$ sous forme polaire.

(13.2.b💡) Soit $z = 2 - i$. Calculez z^3.

13.3. Racines complexes

Les **racines complexes** représentent un domaine étrange des mathématiques où les nombres prennent une forme parfois déroutante. Lorsque nous abordons les racines complexes, nous entrons dans un monde où les solutions des équations sont souvent multiples et peuvent être exprimées en termes de nombres complexes.

Les racines complexes présentent des propriétés remarquables, notamment la périodicité autour du cercle unité dans le plan complexe. Chaque racine complexe d'un nombre z peut être représentée comme un point sur le cercle unité, ce qui ajoute une dimension géométrique intéressante à leur étude. Elles sont fondamentales dans divers domaines des mathématiques et de physique, offrant des outils puissants pour résoudre des équations, comprendre les phénomènes périodiques, ainsi que modéliser des systèmes dynamiques.

La représentation polaire des nombres complexes nous donne l'indice de possibles symétries et les racines de l'unité vont nous les introduire.

Les racines de l'unité sont des solutions de l'équation $z^n = 1$ où n est un entier positif. Ces racines sont particulièrement importantes dans divers domaines des mathématiques, en particulier en algèbre, en analyse, et dans les applications pratiques telles que le traitement du signal et la théorie des nombres.

Imaginons un nombre complexe z représenté en coordonnées polaires $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. Pour calculer les racines $n$ièmes de l'unité, nous devons répartir uniformément ces angles autour du cercle unité dans le plan complexe. Ces racines sont dès lors disposées également sur le cercle unité du plan complexe, séparées donc par des angles de $\frac{2\pi}{n}$ radians. Les racines $n$ièmes d'un nombre complexe dessinent donc dans le plan complexe les sommets d'un polygone régulier à n côtés.

Par conséquent, les k racines $n$ièmes de l'unité peuvent être écrites comme :

$$w_k = cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\, sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$
$$avec\ k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Chaque racine complexe d'un nombre peut ainsi être représentée comme un point sur le cercle unité, ce qui confère une dimension géométrique intéressante à leur étude.

Exemple :

Soit $z^3 = 1$.
Nous savons que les racines cubiques de l'unité seront réparties également sur le cercle unité du plan complexe. Il y en aura trois, puisque $n = 3$.
Utilisons la formule :
$w_k = cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\ sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$
Pour $k = 0$, *nous obtenons* $w_0 = cos(0) + i\,sin(0) = 1 + 0i = 1$.
Pour $k = 1$, *nous obtenons* $w_1 = cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\ sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
Pour $k = 2$, *nous obtenons* $w_2 = cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\ sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
w_1, w_2 *et* w_3 *sont les trois racines recherchées.*

Cette méthode peut être étendue à la recherche de toute racine naturelle sur tout nombre complexe.

Exemple :

Soit $z = 4 - 3i$. *Calculer* $\sqrt{z}$.
Déterminons les valeurs du module et de l'argument :

$$r = |z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

$$\theta = arctan\left(\frac{-3}{4}\right)$$

Calculons la première racine :

$$z_0 = \sqrt{5} \times \left(cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\ sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

La seconde racine, équidistante sur le cercle, s'obtient donc en ajoutant π :

$$z_1 = \sqrt{5} \times \left(cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i\ sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right)$$

Après injection de la valeur de θ et résolution par calcul, nous obtenons les deux racines :

$$z_0 \approx 1{,}710 + 0{,}785i$$
$$z_1 \approx -1{,}710 - 0{,}785i$$

Exercices :

Soit $z = 5 + 3i$

(13.3.a) Calculez z^3

(13.3.b) Calculez $\sqrt{z}$

13.4. Le logarithme complexe et ses propriétés

À son tour, le **logarithme complexe** est une extension au domaine des nombres complexes du concept de logarithme que l'on trouve dans les nombres réels. Il peut être défini facilement : si w est un nombre complexe tel que $e^w = z$, z étant complexe, alors w est le logarithme complexe de z et s'exprime comme $w = \log(z)$.

La forme polaire des nombres complexes lie étroitement le logarithme complexe aux fonctions trigonométriques et exponentielles complexes par l'identité d'Euler, ce qui en fait un outil puissant pour simplifier et manipuler des expressions complexes.

Soit $z = re^{i\theta}$, alors :

$$\log z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$$

où n est un entier et $k \in \mathbb{Z}$.

Il convient donc de noter que le logarithme complexe n'est pas *sensu stricto* une fonction puisqu'il possède une infinité de valeurs[32]. Il est donc fréquent que l'on ne considère qu'une plage de valeurs comprise entre π et $-\pi$. On parle alors de **logarithme complexe principal** qui est, lui, une fonction. En l'absence de cette précision, le logarithme complexe n'en est pas une et cette multivaluation entraîne une caractéristique importante : le logarithme complexe est souvent défini avec des « branches » ou des « coupes » dans le plan complexe. Cela implique que le logarithme complexe est continu seulement le long de certaines régions et il peut y avoir des points où le logarithme n'est pas continu.

Les propriétés classiques du logarithme réel s'appliquent au logarithme complexe, mais elles doivent tenir compte de la multivaluation. Ainsi, par exemple, si nous avons $r_{1,2} = |z_{1,2}|$ et $\theta_{1,2} = \arg(z_{1,2})$, alors le logarithme du produit se calcule :

$$\ln(z_1 z_2) = \ln(r_1 r_2) + i((\theta_1 + \theta_2) = 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Exercice :

(13.4.a💡) Soit $z = -1 - \sqrt{3}i$, calculez $\log(z)$

13.5. Équations complexes

Les équations complexes font intervenir des nombres complexes et constituent une extension des méthodes de résolution que nous avons examinées précédemment, aux différences notables que :

- i^2 devra être identifié à -1 ;

[32] On parle parfois de « fonction multivaluée ».

- comme elles se résolvent dans $\mathbb{C}$, la racine carrée (ou plus généralement paire) d'un nombre négatif ne nous arrêtera plus.

La résolution d'une équation complexe consiste à regrouper les termes en z, puis à exprimer la solution sous forme algébrique : $z = x + yi$.

Lorsque l'équation est polynomiale, les méthodes de résolution usuelles s'appliquent, en tenant compte du fait que $i^2 = -1$.

Exemple 1 :

Soit l'équation $2z + 3i = 7 - iz$
Regrouper à gauche les termes en z *:* $2z + iz = 7 - 3i$
Factoriser z *:* $z(2 + i) = 7 - 3i$
Diviser par le coefficient de z *:* $z = \frac{7-3i}{2+i}$
Pour obtenir la forme algébrique, nous devons maintenant multiplier par le conjugué du dénominateur : $z = \frac{(7-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$
Nous résolvons ensuite l'identité remarquable du dénominateur : $z = \frac{(7-3i)(2-i)}{2^2-1^2}$
Il nous reste à simplifier numérateur et dénominateur pour obtenir la forme algébrique de z *:* $z = \frac{17-13i}{5}$

Exemple 2 :

Soit l'équation $5z^2 - 2z + 2 = 0$
Utiliser la méthode de résolution générale des équations du second degré.
Calculons d'abord $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 5 \times 2 = -36$. *Et comme nous sommes dans* $\mathbb{C}$*, nous pouvons réécrire* $\Delta = (6i)^2$.

Appliquons maintenant la formule générale $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(6i)^2}}{2 \times 5} = \frac{2 \pm 6i}{10}$.

Nous avons donc $z_1 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$ *et* $z_2 = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$.

13.6. Les puissances imaginaires

L'étude des nombres complexes conduit naturellement à s'interroger sur le sens d'expressions telles que a^z où a est un nombre réel positif et z un nombre complexe, ou encore sur des puissances dont l'exposant est imaginaire pur.

Soient z et w deux nombres complexes, avec $z \neq 0$.

On définit la puissance complexe de z par w par la formule :

$$z^w = e^{w \log z}$$

où $\log z$ désigne le logarithme complexe de z.

Cette définition prolonge somme toute la relation bien connue des nombres réels et permet de traiter de manière unifiée les exposants réels, imaginaires ou complexes.

Il est important de souligner que, puisque le logarithme complexe est multivalué, la puissance complexe l'est également en général.

Considérons maintenant un nombre réel strictement positif $a > 0$ et un exposant imaginaire pur iy, avec $y \in \mathbb{R}$.

On a $a^{iy} = e^{iy \ln a}$.

En utilisant l'identité d'Euler : $e^{i\theta} = cos(\theta) + i\, sin(\theta)$, on obtient directement :

$$a^{i\theta} = cos(y\, ln\, a) + i\, sin(y\, ln\, a)$$

Ainsi, la puissance imaginaire d'un réel positif est un nombre complexe de module 1, situé sur le cercle unité du plan complexe.

Nous pouvons en dériver facilement le cas particulier des puissances de l'unité imaginaire.

Toujours grâce à l'identité d'Euler, l'unité imaginaire i peut être écrite sous forme exponentielle :

$$i = e^{i\pi/2}$$

On peut alors définir ses puissances complexes par :

$$i^z = e^{z \log i}$$

En choisissant la branche principale du logarithme complexe, on a $\log i = i\frac{\pi}{2}$, d'où il résulte que $i^z = e^{i\frac{\pi}{2}z}$.

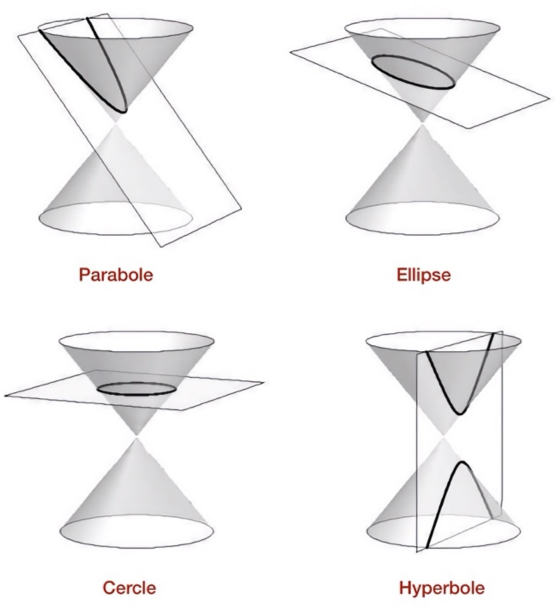
En particulier, pour un exposant imaginaire pur $z = iy$, on obtient : $i^{iy} = e^{-\frac{\pi}{2}y}$ qui est un nombre réel strictement positif.

Ainsi, on calcule par exemple la valeur suivante :

$$i^i \approx 0{,}20787957$$

14. LES CONIQUES

Les **coniques** sont des courbes planes obtenues comme intersections d'un plan avec une surface conique. Cette définition géométrique, ancienne et élégante, remonte à l'Antiquité grecque et à l'étude systématique de ces courbes par Apollonius de Perge, soit bien avant que l'algèbre ne s'en mêle.



Derrière cette construction apparemment abstraite se cachent pourtant des objets familiers : cercles, ellipses, paraboles et hyperboles. Ces courbes apparaissent naturellement dès que l'on étudie des trajectoires, des phénomènes optiques, des mouvements planétaires ou des systèmes mécaniques. Elles constituent ainsi un point de rencontre merveilleux entre géométrie, algèbre et physique.

Dans ce chapitre, les coniques seront abordées à travers leur description algébrique et leurs propriétés géométriques. Nous verrons comment une équation du second degré à deux variables suffit à faire apparaître toute cette diversité de formes, et comment l'algèbre permet, en retour, de lire et de comprendre la géométrie. Autrement dit, après avoir appris à tracer des droites, il est temps de leur donner un peu de courbure.

À nouveau, les coniques ne sont pas toutes des fonctions : à certaines valeurs de x peuvent correspondre deux valeurs de y. En revanche, elles ont toutes une équation dérivée de la forme générale :

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

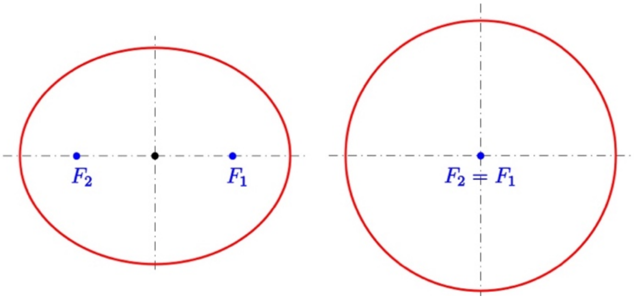
Lorsque certains coefficients sont égaux à zéro, cette équation peut mener à des **coniques dégénérées** telles que deux droites concourantes, deux droites parallèles, une droite, un point ou le vide. Le concept de conique dégénérée se réfère à une forme spécifique de conique qui, par des conditions particulières, perd certaines caractéristiques habituelles et se transforme en une forme plus simple ou dans un cas limite. Graphiquement, une conique dégénérée apparaît lorsque l'intersection d'un plan avec un cône à deux nappes est réalisée de façon triviale.

Cette équation générale est donc généralement délaissée au profit de l'équation particulière propre à chaque conique.

14.1. L'ellipse (et le cercle)

Ainsi que la figure ci-dessus le suggère, le cercle est une forme particulière de l'ellipse générée par une coupe du plan perpendiculaire à l'axe du cône.

Une **ellipse** est le lieu géométrique de tous les points dont la somme des distances à deux points fixes (les foyers) est constante. Lorsque les deux foyers se confondent en un point unique, ce dernier est un centre et le lieu des points équidistants forme un cercle.



L'ellipse possède deux foyers, deux axes de symétrie et quatre sommets (là où les axes de symétrie traversent l'ellipse).

Son équation dérive de sa définition : une ellipse est l'ensemble des points $P(x, y)$ tels que la somme des distances entre P et les foyers F_1 et F_2 est une constante désignée par $2a$, ce qui se traduit par :

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

Or, la distance entre P et chaque foyer est donnée par le théorème de Pythagore :

$$PF_1 = \sqrt{(x - a^2) + y^2}$$
$$PF_2 = \sqrt{(x + a^2) + y^2}$$

Dès lors, en réinjectant ces valeurs dans la première équation, nous trouvons :

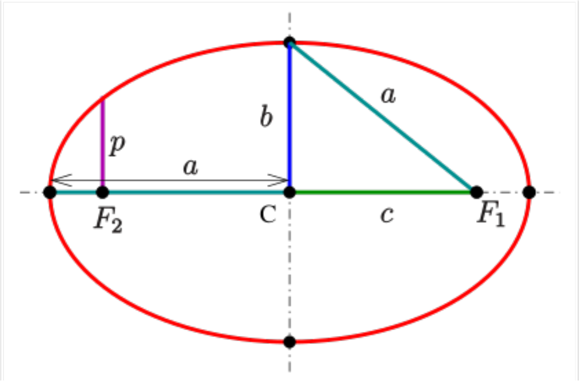
$$\sqrt{(x - a^2) + y^2} + \sqrt{(x + a^2) + y^2} = 2a$$

Et en simplifiant, nous obtenons l'équation générale de l'ellipse centrée à l'origine :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

où a est la demi-longueur de l'axe horizontal, et b la demi-longueur de l'axe vertical.

Soit une ellipse horizontale $(a > b)$:



Nous constatons que le triangle abc est un triangle rectangle et que, par application du théorème de Pythagore, nous pouvons déterminer que, b étant le demi-petit-axe et c étant la distance focale :

$$\boxed{c^2 = a^2 - b^2}$$

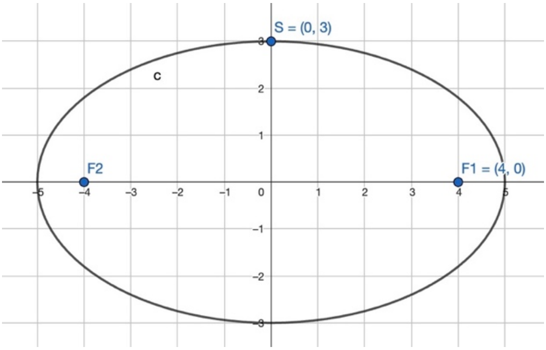
Un raisonnement identique génère une relation comparable pour une ellipse verticale :

$$c^2 = b^2 - a^2$$

Ceci permet de déterminer l'équation d'une ellipse centrée à l'origine.

Exemple :

Déterminer l'équation de l'ellipse suivante.



Le sommet $S(0,3)$ *permet de connaître directement la valeur du demi-axe vertical :*

$$b = 3$$

Le foyer $F1(4,0)$ *donne lui la distance du centre à l'un des foyers :*

$$c = 4$$

Le théorème de Pythagore permet de trouver la valeur de a :

$$c^2 = a^2 - b^2 \;\Rightarrow a = 5$$

L'équation de l'ellipse est donc :

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Le **cercle** apparaît comme un cas particulier de l'ellipse lorsque les deux demi-axes sont égaux. Les foyers se confondent alors avec le centre, et l'équation devient :

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

Cette équation comparable à l'identité de Pythagore est confirmée graphiquement en assimilant le rayon du cercle à l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés correspondent au cosinus et au sinus de l'angle situé à l'origine.

Par application aux coniques des principes de transformations des fonctions[33], l'équation générale d'un cercle non centré à l'origine peut être calculée :

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

où (h, k) sont les coordonnées du centre du cercle.

De même, l'équation générale d'une ellipse non centrée est :

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

où (h, k) sont les coordonnées du centre de l'ellipse, a la demi-longueur de l'axe horizontal et b la demi-longueur de l'axe vertical.

Exercices :

(14.1.a) Déterminez l'équation de l'ellipse verticale, centrée à l'origine, ayant un sommet en $(0, -7)$ et passant par $(4, 4.2)$

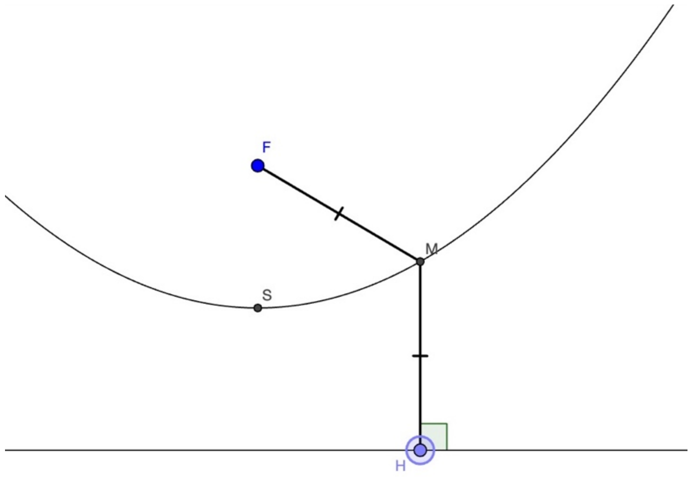
(14.1.b) Déterminez l'équation du cercle passant par les points $(-1,0)$ et $(-1,4)$.

(14.1.c) Déterminez l'équation de l'ellipse dont les foyers sont $F1(-2, -7)$; $F2(-2,1)$ et les sommets sont $S1(-2, -8)$; $S2(-2, -2)$.

33 Voir 9.2. Transformation d'une fonction (p. 54)

14.2. La parabole

Une **parabole** est le lieu géométrique de l'ensemble des points situés à égale distance d'une droite (la directrice, horizontale dans l'exemple ci-après) et d'un point (le foyer *F*).



Outre son foyer F et sa directrice, une parabole est aussi caractérisée par :

- un sommet S équidistant au foyer et à la directrice ;
- un axe de symétrie passant par le foyer et le sommet.

Considérons dans un premier temps la parabole verticale (définie par une directrice horizontale). Elle est définie par une équation générale de la forme :

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Soit l'équation quadratique dont nous savons déjà calculer le déterminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Nous savons aussi en calculer les racines :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

L'axe de symétrie est une droite verticale coupant l'axe des x à équidistance des racines. Par moyenne de x_1 et x_2, nous en obtenons directement l'équation :

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Injectant cette valeur dans l'équation générale de la parabole, nous obtenons facilement les coordonnées de son sommet :

$$S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Remarquons que la parabole verticale est bien une fonction, à l'inverse de la parabole horizontale. Les caractéristiques de cette dernière s'obtiennent en cherchant la fonction réciproque de la parabole verticale.

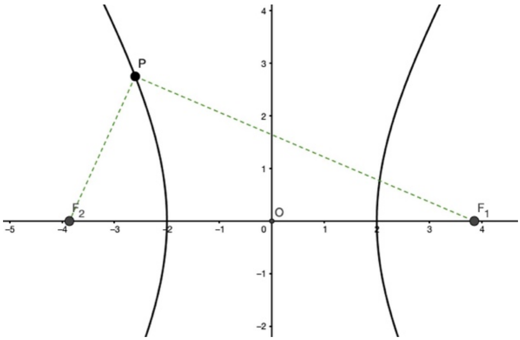
Exercices :

(14.2.a) Déterminez l'équation de la parabole dont le foyer est en (-6, -5) et dont la directrice a comme équation $y = 3$.

(14.2.b) Tracez la parabole définie par l'équation $(y-1)^2 = -8(x+3)$. (Vérifiez la justesse du tracé en calculant deux points non triviaux et en vous assurant qu'ils sont bien sur la parabole dessinée.)

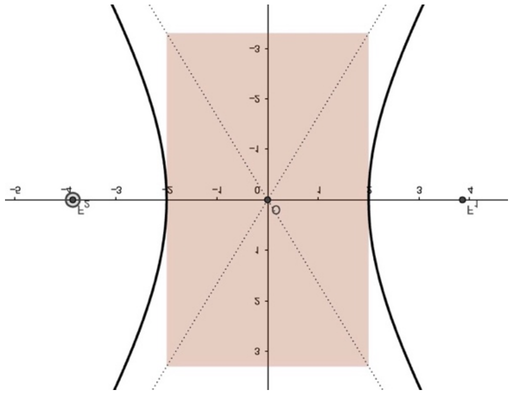
14.3. L'hyperbole

Une **hyperbole** est le lieu géométrique de l'ensemble des points *P* dont la différence des distances à 2 points (les foyers *F1* et *F2*) est constante.



Plusieurs éléments caractérisent une hyperbole :

- Deux foyers *F1* et *F2* ;
- Deux sommets *S1* et *S2* (coupant l'axe des x sur le schéma) ;
- Deux asymptotes (Une asymptote est une droite telle que, lorsque l'abscisse ou l'ordonnée de la fonction tend vers l'infini, la distance de la courbe à la droite tend vers 0. La courbe ne touche donc jamais l'asymptote. Voir ci-dessous)
- Un axe de symétrie transversal passant par les foyers et les sommets ;
- Un axe de symétrie conjugué, perpendiculaire au premier et à équidistance des foyers (et des sommets) ;
- Un rectangle fondamental dont les sommets se trouvent sur les asymptotes et dont deux côtés sont tangents au sommet de l'asymptote (voir ci-dessous).



Considérons dans un premier temps l'hyperbole verticale (définie par axe de symétrie transversal horizontal). Centrée à l'origine, elle est définie par une équation de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Le signe négatif traduit la différence des distances caractéristique de l'hyperbole, par opposition à la somme des distances pour l'ellipse.

Le graphique nous permet de déduite directement que :

- *a* est la moitié de la hauteur du rectangle ;
- *b* est la moitié de sa largeur (soit la distance d'un sommet de l'hyperbole à l'origine).
- *c* peut ici encore être déduit de la relation de Pythagore : $c^2 = a^2 + b^2$.
- Chaque asymptote passant par l'origine et par deux sommets opposés du rectangle, leurs équations sont :

$$y = \frac{b}{a}x$$

$$y = -\frac{b}{a}x$$

Ces éléments permettent de déterminer l'équation d'une hyperbole verticale centrée sur l'origine.

Exemple :

Déterminer l'équation d'une hyperbole dont l'un des points sur l'axe transversal est $(-3{,}0)$ *et dont l'une de ses asymptotes passe par le point* $\left(-2, \frac{10}{3}\right)$.
Le point $(-3{,}0)$ *étant sur l'axe des x, il désigne l'un des sommets et permet de connaître la valeur de* $a = 3$.
Nous pouvons déduire b de l'équation de l'asymptote dont nous connaissons a, mais aussi les valeurs x et y d'un point précis : $\left(-2, \frac{10}{3}\right)$.

$$y = -\frac{b}{a}x$$
$$\frac{10}{3} = -\frac{b}{3}(-2)$$
$$b = 5$$

Connaissant a et b, nous pouvons écrire l'équation de l'hyperbole :

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$$

Par application aux coniques des principes de transformations des fonctions, l'équation générale d'une hyperbole verticale non centrée à l'origine peut être déduite :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

où (h, k)sont les coordonnées du centre de l'ellipse, c'est-à-dire du point d'intersection des asymptotes. Les équations des asymptotes deviennent elles :

$$y = \frac{b}{a}(x - h) + k$$
$$y = -\frac{b}{a}(x - h) + k$$

Exercices :

(14.3.a) Déterminez l'équation d'une hyperbole verticale dont un des sommets est situé au point $(0,16)$ et dont l'équation d'une asymptote est $y = \frac{6}{5}x - 8$.

(14.3.b) Tracez l'hyperbole définie par l'équation $\frac{(x-5)^2}{64} - \frac{(y+4)^2}{100} = 1$.
(Vérifiez la justesse du tracé en calculant deux points non triviaux et en vous assurant qu'ils sont bien sur la courbe dessinée.)

14.4. Systèmes non linéaires

À l'instar des droites, deux coniques peuvent présenter des intersections dont les coordonnées peuvent être calculées en résolvant un système d'équations. Les équations de coniques étant de degré 2, nous sommes donc désormais en présence d'**équations non linéaires**. Le nombre d'intersections peut dans ce cas être de :

- 0 : les coniques ne se touchent pas ;
- 1 : les coniques ont un point de tangente commun ;
- 2 : une parabole coupant une ellipse p. ex. ;
- 3 : un cercle coupant une parabole tout en étant tangent à son sommet p. ex. ;

- 4 : une ellipse horizontale croisant une ellipse verticale p. ex.

La résolution suit toutefois les mêmes étapes que pour tout système d'équations : par substitution ou réduction, obtenir une équation à variable unique ; déterminer la valeur de l'inconnue et injecter cette valeur dans l'une des équations de départ afin de déterminer l'autre inconnue.

Attention, si la première inconnue admet plusieurs valeurs, il faut rechercher pour chacune d'elles les valeurs correspondantes de la seconde inconnue et les apparier correctement.

Exemple :

Déterminer les points d'intersection entre la parabole d'équation $x^2 = 12(y+3)$ *et l'ellipse d'équation* $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Remplacer le x^2 *de l'ellipse par sa valeur donnée dans l'équation de la parabole :*

$$\frac{12(y+3)}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Après regroupement et utilisation de la formule quadratique, nous obtenons :

$$y \in \{-3; -1{,}32\}$$

Après avoir injecté ces valeurs de y dans l'une des équations de départ, nous obtenons pour $y = -3$ *:*

$$x = 0$$

et pour $y = -1{,}32$ *:*

$$x = \pm\sqrt{20{,}16} \approx \pm 4{,}49$$

Les points d'intersection sont donc : $(0, -3)$; $(\sim -4{,}49 ; -1{,}32)$; $(\sim 4{,}49 ; -1{,}32)$. *Notons que le premier point est une tangente.*

Exercices :

(14.4.a) Déterminez les points d'intersection entre la droite $y = -2x + 6$ et l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{49} = 1$

(14.4.b) Déterminez les points d'intersection des deux coniques $(x-1)^2 - 2y^2 = 4$ et $x^2 + y^2 = 9$

(14.4.c) Déterminez les points d'intersection entre la parabole $x^2 = -4(y - 2{,}75)$ et l'hyperbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

(14.4.d) Résoudre le système $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 40 \end{cases}$.

(14.4.e) Un rectangle a une aire de 48 m^2 et un périmètre de 32 m. Quelles sont ses dimensions ?

15. SUITES ET SÉRIES

Les **suites et les séries** sont des objets mathématiques assez intuitifs. Toutefois, il est important de ne pas les confondre :

- Une **suite** est une fonction qui associe à chaque entier naturel un nombre, appelé terme de la suite.
- Une **série** est associée à une suite et correspond à la somme de ses termes.

Bien qu'il existe des suites et des séries dont les termes sont aléatoires, nous nous intéresserons ici aux suites et séries dont les termes sont déterminés par une **règle**.

Exemple :

La règle de la suite $\{1, 4, 9, 16, 25 \ldots\}$ *est* n^2 *où* n *désigne le* n*-ième terme de la suite.*

15.1. Suites et séries arithmétiques

Une **suite arithmétique** est une suite dans laquelle chaque terme permet de former le suivant en lui ajoutant une constante (appelée *raison*).

$$u_{n+1} = u_n + r$$

La règle d'une suite arithmétique permet d'en calculer le nième terme et se présente de la façon suivante.

$$u_n = u_0 + nr$$

Déterminer la règle d'une telle suite consiste à :

1. Calculer la différence entre deux termes consécutifs pour déterminer r.
2. Déterminer u_0, c'est-à-dire le terme de rang 0, le terme hypothétique qui aurait pu générer le premier terme de la suite.

Exemple :

Soit la suite $\{5, 8, 11, 14, 17, 20 \dots\}$
$r = 17 - 14 = 3$ *(p. ex., toute autre différence de deux termes consécutifs eût été possible.)*

$$u_0 = u_1 - r = 5 - 3 = 2$$
$$u_n = 2 + 3n$$

La suite est décroissante si $r < 0$, constante si $r = 0$ et croissante si $r > 0$.

Une **série arithmétique** est donc la somme des termes d'une suite arithmétique.

Il est souvent utile d'adopter une notation dite *sigma* qui mentionne la formule explicite permettant de calculer le nième terme de la série.

Exemple :

$$\sum_{n-1}^{6} 2n \Leftrightarrow 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$$

où le sigma désigne l'opération d'additionner les termes, le 6 *supérieur le nombre de termes à additionner, le* $\text{n} - 1$ *inférieur le rang du terme de départ et* 2n *est la règle de la suite sur laquelle est fondée la série.*

Une série arithmétique prend la forme générale suivante :

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

que l'on peut réécrire :

$$S_n = u_1 + (u_1 + r) + (u_1 + 2r) + \cdots + (u_1 + (n-1)r)$$

ou, en en inversant l'ordre des termes :

$$S_n = (u_1 + (n-1)r) + (u_1 + (n-2)r) + \cdots + (u + r) + u$$

En additionnant terme à terme ces deux façons d'écrire la même série, nous pouvons simplifier :

$$\begin{aligned} 2S_n &= (2u_1 + (n-1)r) + (2u_1 + (n-1)r) \\ &\quad + \cdots (2u_1 + (n-1)r) \\ 2S_n &= n(2u_1 + (n-1)r) \\ S_n &= \frac{n(2u_1 + (n-1)r)}{2} \end{aligned}$$

La somme des n premiers termes d'une série arithmétique de raison r et commençant par u_1 est donc donnée par la formule générale :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a + kr = \frac{n(2u_1 + (n-1)r}{2}$$

Exercices :

(15.1.a) Déterminer la règle de la suite

$\{1, 6, 11, 16, 21, 26 \ldots\}$

(15.1.b) Quel est le 100ᵉ terme de la suite

$\{2, 9, 16, 23, 30, 37 \ldots\}$?

(15.1.c) Évaluez $\sum_{n=3}^{7} x^2$.

(15.1.d) Écrivez la série fondée sur les quatre premiers termes de la suite $\{1, 3, 5, 7, 9, 11 \ldots\}$.

15.2. Suites et séries géométriques

Une **suite géométrique** est une suite dans laquelle chaque terme permet de former le suivant en le multipliant par une constante (appelée *raison*).

$$u_{n+1} = u_n \times r$$

La règle d'une suite géométrique permet d'en calculer le nième terme et se présente de la façon suivante :

$$u_n = u_0 \times r^{n-1}$$

Déterminer la règle d'une telle suite consiste à :

1. Calculer le facteur entre deux termes consécutifs pour déterminer r.
2. Déterminer u_1, c'est-à-dire le premier terme de la suite.

Exemple :

Soit la suite $\{3, 6, 12, 24, 48, 96 \ldots\}$
$r = \frac{12}{6} = 2$ *(p. ex., toute autre division de deux termes consécutifs eût été possible.)*
Nous voyons directement que $u_1 = 3$.

$$u_n = 3 \times 2^{n-1}$$

Sens de la variation d'une suite géométrique :

- $r < 0$: La suite est alternée (chaque terme change de signe).
- $0 \leq r < 1$: La suite est décroissante positive si $u_0 > 0$ et croissante négative
  si $u_0 < 0$.

- $r = 1$: La suite est constante.
- $1 < r$: La suite est croissante positive si $u_0 > 0$ et décroissante négative si $u_0 < 0$.

Convergence d'une suite géométrique :

- $r \leq -1$: La suite diverge.
- $|r| < 1$: La suite converge vers 0.
- $r = 1$: La suite converge vers u_0.
- $r > 1$: La suite diverge.

Une **série géométrique** est quant à elle la somme des termes d'une suite géométrique et, ici aussi, la notation sigma sera requise.

Son calcul se fera selon une formule que l'on dérive d'un raisonnement analogue à celui des séries arithmétiques.

Une série géométrique prend la forme générale suivante :

$$S_n = u_1 + ru_1 + r^2u_1 + \cdots + r^{n-1}u_1$$

que l'on peut réécrire en mettant multipliant par la raison r :

$$rS_n = ru_1 + r^2u_1 + \cdots + r^{n-1}u_1 + r^nu_1$$

En soustrayant terme à terme rS_n de S_n, nous obtenons :

$$(1-r)S_n = u_1 - r^nua_1$$

$$S_n = \frac{u_1 - r^nu_1}{1-r} \; avec \; r \neq 1$$

La somme des n premiers termes d'une série géométrique de raison r et commençant par a_1 est donc donnée par la formule générale :

$$\sum_{k=0}^{n-1} ur^k = u\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

Exercices :

(15.2.a) Déterminer la règle de la suite
$\{10, 30, 90, 270, 810 \ldots\}$

(15.2.b) Écrivez les 4 premiers termes de la suite géométrique de raison -2 et commençant par 5.

(15.2.c 💡) Calculez la somme des 11 premiers termes de la série $\{8, -4, 2 \ldots\}$.

(15.2.d 💡) Résolvez le problème de Sissa : si l'on place 1 grain de blé sur la première case de l'échiquier, 2 sur la deuxième, 4 sur la troisième, 8 sur la quatrième et ainsi de suite pour les 64 cases, combien de grains de blé seront nécessaires ? (valeur sous forme algébrique… aucune calculatrice n'est nécessaire.)

15.3. Séries de puissances

Les **séries de puissances** permettent d'approximer des fonctions comme des sommes infinies de termes. Elles jouent dès lors un rôle central en analyse mathématique et ont de nombreuses applications en sciences, en ingénierie et en physique.

Une série de puissances s'exprime avec la forme canonique suivante :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

où :

- $f(x)$ est la fonction que nous cherchons à représenter ;
- a_n sont les coefficients de la série ;
- c est le centre de la série, c'est-à-dire la valeur autour de laquelle nous construisons la série de puissances.

Ici encore le calcul de ces séries sort de cadre de ce précis, mais il nous semblait utile de dès à présent en donner une définition sommaire.

Exemple :

La série exponentielle est une série infinie particulière qui relie le nombre d'Euler aux factorielles :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Lorsque $x = 1$, *nous obtenons le nombre d'Euler :*

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

15.4. Séries de puissances complexes

Les **séries de puissances complexes** constituent à leur tour un outil mathématique fondamental dans l'étude des fonctions analytiques. Elles permettent d'exprimer une fonction comme une somme infinie de termes, chacun étant une puissance d'une variable complexe. Une série de puissances complexes a la forme générale suivante :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Ces séries offrent une manière puissante de représenter des fonctions complexes de manière analytique et de les étudier en détail. Elles permettent de généraliser les concepts de fonctions polynomiales à des fonctions beaucoup plus complexes et variées. Elles jouent ainsi un rôle crucial dans de nombreuses branches des mathématiques et de la physique, notamment en analyse complexe ou en théorie des nombres, en physique mathématique, et bien d'autres domaines.

À l'instar des autres séries, les séries de puissances complexes peuvent converger dans une certaine région du plan complexe, appelée le domaine de convergence. L'étude de ces critères de convergence sort toutefois de ce précis[34].

15.5. Convergences et divergences

L'étude des séries infinies est un domaine fondamental de l'analyse mathématique qui sort quelque peu de l'algèbre en faisant appel à la notion de limite.

Une série est essentiellement une somme infinie de termes. Cependant, il est important de déterminer si cette somme converge vers une valeur finie ou diverge au contraire vers l'infini. Pour ce faire, divers critères de convergence et de divergence ont été développés. Nous allons en examiner quelques-uns.

Ici encore, certains feront appel à des notions d'analyse dont l'approfondissement sort du thème de cet ouvrage. Nous renvoyons le lecteur qui rencontrerait des difficultés vers un traité d'analyse.

Le **critère de Cauchy** (ou critère de la convergence absolue) est sans doute le plus utilisé. Il stipule que pour qu'une série converge, il faut que la somme des termes restants soit arbitrairement petite lorsque l'on s'éloigne suffisamment loin dans la série. Autrement dit, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout $n > N$ et pour toute somme partielle S_m, l'inégalité $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$ est satisfaite, alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolument. Un exemple permettra de mieux comprendre…

Exemple :

Nous voulons déterminer si cette série converge ou diverge en utilisant le critère de Cauchy :

[34] Le lecteur curieux pourra rechercher les deux principaux critères de convergence : le critère de Cauchy-Hadamard et celui de D'Alembert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Le critère de Cauchy stipule que, pour chaque $\varepsilon > 0$*, l existe un entier* N *tel que, pour tout* $m > n > N$*, nous avons :*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \right| < \varepsilon$$

Tous les termes de la série étant positifs, nous pouvons faire l'économie de la valeur absolue :

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} < \varepsilon$$

Considérant que $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ *pour tout* $k \geq 2$*, nous pouvons écrire :*

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Pour que cette quantité soit inférieure à ε*, nous devons trouver un entier* N *tel que, pour tout* $m > n > N$*, l'inégalité suivante soit satisfaite :*

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

L'inégalité peut être simplifiée :

$$\frac{1}{n(n+1)} < \varepsilon$$

$$n^2 + n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Maintenant, nous pouvons choisir l'entier N *tel que :*

$$N^2 + N > \frac{1}{\varepsilon}$$

Pour tout $m > n > N$*, nous avons montré que :*

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} < \varepsilon$$

Par conséquent, le critère de Cauchy est respecté et la série converge.

Exercice :

(15.6.a) La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ converge-t-elle ?

15.6. Identité d'Euler

Nous l'avons déjà évoquée, l'**identité d'Euler** est une expression remarquable, souvent qualifiée de belle ou d'étonnante en raison de la simplicité et de la profondeur par lesquelles elle relie quatre des constantes mathématiques les plus importantes : le nombre e, le nombre π, l'unité réelle 1 et l'unité imaginaire i.

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

Nous pouvons désormais la retrouver par un chemin nouveau… Nous savons déjà exprimer la série exponentielle :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Or, en remplaçant x par ix, nous obtenons facilement l'identité suivante :

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots$$

Nous pouvons alors simplifier les termes en substituant -1 à i^{2n} et $-i$ à i^{2n+1} :

$$e^{ix} = 1 + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots$$

Séparons à présent les termes réels des imaginaires :

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$

Les parties réelles et imaginaires de e^{ix} sont respectivement les séries de cosinus et sinus. Ainsi, nous pouvons réécrire :

$$e^{ix} = \cos(x) + i\, sin(x)$$

En posant $x = \pi$, nous obtenons :

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\, sin(\pi) = -1$$

C.Q.F.D.

L'identité d'Euler a été essentielle pour comprendre les propriétés des nombres complexes et a ouvert la voie à la représentation polaire des nombres complexes. Elle est utilisée pour analyser des signaux périodiques, comme les signaux électriques alternatifs, mais aussi en analyse et joua un rôle important dans la formulation de l'équation de Schrödinger en mécanique quantique.

16. VECTEURS ET ESPACES VECTORIELS

L'**algèbre linéaire** prolonge naturellement l'étude des systèmes d'équations linéaires en introduisant les notions de vecteurs, d'espaces vectoriels et de transformations linéaires. Ces outils fournissent un langage commun pour aborder, de manière unifiée, des problèmes issus aussi bien de la géométrie que de la physique ou de nombreuses applications scientifiques. Dès qu'il est question de direction, de superposition ou de changement de repère, l'algèbre linéaire pointe le bout de son nez.

Dans ce chapitre, nous commencerons par introduire les vecteurs dans le plan et dans l'espace : des objets simples à dessiner, mais capables de transporter beaucoup d'information. Nous formaliserons ensuite progressivement les notions d'espace vectoriel, de base et de combinaison linéaire. L'objectif n'est pas encore de plonger dans une axiomatique exhaustive, mais de construire une compréhension structurée et opérationnelle de ces concepts, suffisamment robuste pour éviter de se perdre en chemin.

Autrement dit, il s'agit d'apprendre à se déplacer dans des espaces parfois abstraits, en s'assurant que les directions choisies sont bonnes… et que les bases sont bien en place.

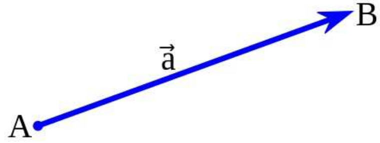
16.1. Les vecteurs

Un **vecteur** géométrique est un objet représenté par un segment orienté. Il est caractérisé par :

- une direction,
- un sens,
- une norme (ou longueur).

Deux vecteurs seront considérés comme égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme, indépendamment de leur position dans le plan ou dans l'espace.

Un vecteur se note par exemple $\vec{a}$ et peut être représenté dans l'espace vectoriel de cette façon :



Dans cet exemple, la magnitude (ou grandeur scalaire) est donnée par la distance entre les points A et B, la direction est donnée par l'orientation de la droite et le sens par la flèche (ici de A à B).

Les vecteurs prolongent la notion de nombre et nécessitent donc de clarifier ce que nous appelions auparavant *nombre* en introduisant le terme de *nombre scalaire*. Un nombre scalaire (ou, plus simplement, un scalaire) est une grandeur non vectorielle ; il peut être vu comme nombre réel $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel.

La magnitude d'un vecteur est donc un nombre scalaire, comme toute distance. Il s'agit en outre d'un nombre positif. L'opération qui permet de connaître la magnitude d'un vecteur est la norme et se note $\|\vec{a}\|$.

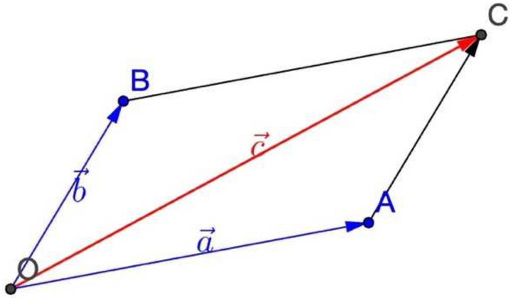
Nous verrons plus loin que les notions de magnitude et de direction pourront être comprises dans des acceptions plus larges que celles que nous adopterons maintenant.

16.2. Addition, soustraction et norme

Les vecteurs peuvent s'additionner selon deux méthodes comparables.

Lorsqu'ils partagent la même origine, la méthode du parallélogramme est la plus évidente : construire un parallélogramme sur base des deux vecteurs existants. La diagonale partant de l'origine dessinera le vecteur résultant :

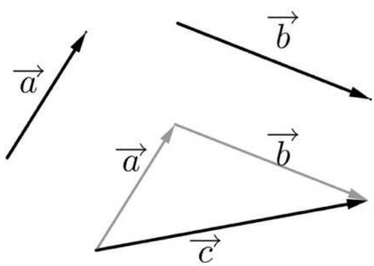
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$



Si les deux vecteurs à additionner n'ont pas la même origine, la relation de Chasles sera adoptée :

- Translater l'un des vecteurs de façon à ce que son origine se superpose à l'extrémité du second ;
- Tracer le vecteur résultant en partant de l'origine du vecteur resté immobile jusqu'à l'extrémité du vecteur translaté.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$



Il est possible de réaliser l'opération algébriquement si les vecteurs se trouvent dans un plan cartésien. Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ sera caractérisé par les coordonnées du point $A\ (x_A, y_A)$ et par celles du point $B\ (x_B, y_B)$. Il pourra alors être défini de la façon suivante :

$$\overrightarrow{AB} = (\Delta x, \Delta y)$$
$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$
$$\overrightarrow{AB} = (a, b)$$

a et b sont les **composantes** du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Si $\overrightarrow{AB} = (a, b)$ et $\overrightarrow{CD} = (c, d)$, alors

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (a, b) + (c, d)$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (a + c, b + d)$$

La soustraction peut être opérée de la même façon.

Exemple :

Soient $\vec{u} = (5{,}2)$ *et* $\vec{v} = (3{,}0)$. *Calculer* $\vec{u} - \vec{v}$.

$$\vec{u} - \vec{v} = (5 - 3{,}2 - 0)$$
$$\vec{u} - \vec{v} = (2{,}2)$$

On comprend graphiquement que l'addition de vecteurs est commutative :

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}}$$

mais aussi associative :

$$\boxed{\vec{u} + \overrightarrow{(v + w)} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}}$$

Enfin, toujours si un vecteur se trouve dans un espace cartésien, il est possible d'en calculer la norme en appliquant le théorème de Pythagore. Si $\vec{v} = (a, b)$, alors :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

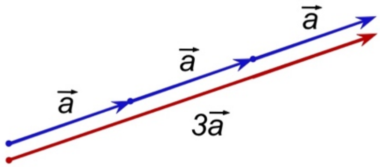
Exercices :

(16.2.a) Soient $\vec{u} = (2,5)$ et $\vec{v} = (1,-1)$. Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

(16.2.b) Soient $\vec{u} = (3,-2)$ et $\vec{v} = (-1,4)$. Calculer $\overrightarrow{u+v}$ et $\overrightarrow{u-v}$.

16.3. Multiplication par un scalaire

Multiplier un vecteur par un scalaire revient à multiplier sa norme sans changer sa direction (ni son sens, s'il s'agit d'un vecteur orienté) :



Autrement dit, multiplier un vecteur par un scalaire revient à multiplier chacune de ses composantes par ce scalaire. Si $\vec{v} = (a,b)$:

$$k\vec{v} = (ka, kb)$$

Cette opération modifie la norme du vecteur par un facteur k, sans changer sa direction, sauf si k est négatif, auquel cas le sens est inversé.

Sur le graphe, l'opération est visiblement associative et distributive :

$$j(\overrightarrow{kv}) = (jk)\vec{v} = k(\overrightarrow{jv})$$

Exemple :

Soit $\vec{v} = (2,3)$, *déterminer les composantes de* $5\vec{v}$.

$$5\vec{v} = 5(2,3)$$
$$5\vec{v} = (10,15)$$

16.4. Produit scalaire

La multiplication de deux vecteurs l'un par l'autre est une opération moins intuitive, d'autant que deux opérations distinctes peuvent y être assimilées :

- Le produit scalaire (qui génère un nombre… scalaire) : $\vec{u} \cdot \vec{v}$
- Le produit vectoriel (qui génère un… vecteur) : $\vec{u} \times \vec{v}$

Ces opérations sont résolument différentes :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \neq \vec{u} \times \vec{v}$$

Nous n'aborderons pas plus avant le produit vectoriel qui est généralement traité dans des cours d'algèbre plus avancés.

Le **produit scalaire** de deux vecteurs du plan permet d'associer un nombre réel à ces vecteurs.

Si $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$, alors

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = (ac + bd)}$$

Exemple :

Soient $\vec{u} = (5,12)$ *et* $\vec{v} = (-3,4)$.
Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left((5.-3) + (12.4)\right)$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-15 + 48)$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 33$$

Si nous connaissons l'angle formé par les deux vecteurs, nous pouvons utiliser l'identité suivante :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \, cos\,\theta}$$

Et en déduire une réciproque permettant de calculer l'angle si nous connaissons les vecteurs :

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}}{\|u\|} \cdot \frac{\vec{v}}{\|v\|}$$

Exemple :

Calculer l'angle entre $\vec{u} = (-3{,}4)$ *et* $\vec{v} = (5{,}12)$.

$$cos\,\theta = \frac{\vec{u}}{\|u\|} \cdot \frac{\vec{v}}{\|v\|}$$

$$cos\,\theta = \frac{\vec{u}}{\sqrt{9+16}} \cdot \frac{\vec{v}}{\sqrt{25+144}}$$

$$cos\,\theta = \frac{\vec{u}}{\sqrt{9+16}} \cdot \frac{\vec{v}}{\sqrt{25+144}} = \frac{\vec{u}}{5} \cdot \frac{\vec{v}}{13}$$

$$cos\,\theta = \left(-\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13}\right) + \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13}\right) = -\frac{15}{65} + \frac{48}{65} = \frac{33}{65}$$

$$\theta = cos^{-1}\frac{33}{65} \approx 59{,}5°$$

Exercices :

Soient $\vec{u} = (-3{,}4)$ et $\vec{v} = (-2{,}1)$.

(16.4.a) Calculez $\vec{u} - \vec{v}$.

(16.4.b) Calculez $2\vec{u} - 3\vec{v}$.

16.5. Combinaison linéaire de vecteurs

Une **combinaison linéaire** de vecteurs est une somme de vecteurs multipliés par des scalaires. Par exemple, $\vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{w}$ est une combinaison linéaire de trois vecteurs.

La combinaison linéaire de vecteurs dispose des propriétés suivantes qui découlent des propriétés présentées précédemment :

$$\text{Si } \vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}, \text{ alors } \vec{v} = \vec{w}.$$
$$\text{Si } \alpha\vec{v} = 0, \text{ alors } \alpha = 0 \text{ ou } \vec{v} = 0.$$
$$-1(\vec{v}) = -\vec{v}$$
$$\alpha(\vec{u} - \vec{v}) = \alpha\vec{u} - \alpha\vec{v}$$
$$(\alpha - \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} - \beta\vec{v}$$

Un ensemble de vecteurs forme une base d'un **espace vectoriel** ***E*** si tout vecteur de cet espace peut s'exprimer de manière unique comme une combinaison linéaire de ces vecteurs.

L'espace vectoriel dans lequel nous avons travaillé jusqu'à présent dispose de deux dimensions. On le désigne alors par $E = \mathbb{R}^2$. Si nous considérons des vecteurs à trois dimensions, ils auraient la forme $\vec{v} = (a, b, c)$ et seraient dans $E = \mathbb{R}^3$.

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^3$*, soient* $\vec{u} = (1,2,-1)$*,* $\vec{v} = (2,1,1)$ *et* $= \vec{w}(4,54,3)$. $\vec{w}$ *est-il une combinaison linéaire de* $\vec{u}$ *et de* $\vec{v}$ *?*
Si tel est le cas, il existe des scalaires a *et* b *tels que* $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w}$.
Ceci implique que le système suivant dispose de solutions :

$$\begin{cases} a + 2b = 4 \\ 2a + b = 5 \\ -a + b = 3 \end{cases}$$

En résolvant ce système, nous trouvons bien une solution qui donne $a = 2$ *et* $b = 1$*, ce qui signifie que* $\vec{w}$ *est bien une combinaison linéaire de* $\vec{u}$ *et de* $\vec{v}$.

Pour expliquer le calcul de la norme d'un vecteur, et celui de l'addition de deux vecteurs, nous avons fait appel au plan cartésien. Mais ce plan cartésien n'est qu'un référentiel parmi d'autres. D'ailleurs, sa forme conventionnelle, avec l'axe des *x* et celui des *y* suggère dès le départ une familiarité avec un espace vectoriel *E*. Ils peuvent constituer une **base vectorielle**, c'est-à-dire un ensemble de vecteurs (deux en l'occurrence) permettant d'exprimer n'importe quel autre vecteur sous la forme d'une combinaison linéaire.

En fait, dans $E = \mathbb{R}^2$, tout couple de vecteurs non parallèles permet de définir une base vectorielle. Si $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ définissent une base vectorielle, y décomposer le vecteur $\vec{v}$ consiste à trouver deux scalaires *a* et *b* tels que :

$$\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$$

Exemple :

Soit une base vectorielle dans $E = \mathbb{R}^2$ *définie par* $\vec{\imath} = (1{,}3)$ *et* $\vec{\jmath} = (2{,}5)$.
Nous cherchons à y décomposer le vecteur $\vec{v} = (3{,}4)$.
Nous cherchons les coefficients v_i *et* v_j *tels que* $\vec{v} = v_i \cdot \vec{\imath} + v_j \cdot \vec{\jmath}$.
Les égalités nécessaires à chacun des composants conduisent à un système de deux équations :

$$\begin{cases} 1v_i + 2v_j = 3 \\ 3v_i + 5v_j = 4 \end{cases}$$

Nous en déduisons les valeurs $v_i = -7$ *et* $v_j = 5$ *qui sont les coefficients recherchés.*
Nous pouvons dès lors écrire la décomposition recherchée : $\vec{v} = -7\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$.

Si les vecteurs sont orthonormés, nous retrouvons les modes de représentation des repères cartésiens, en manière telle que nous entrevoyons déjà que les espaces vectoriels constituent des modes d'élargissement de l'algèbre élémentaire.

Exercices :

(16.5.a) Exprimez le vecteur $\vec{v} = (3{,}3)$ dans une base vectorielle définie par $\vec{\imath} = (1{,}0)$ et $\vec{\jmath} = (0{,}1)$.

(16.5.b) Exprimez le vecteur $\vec{v} = (4{,}5)$ dans une base vectorielle définie par $\vec{\imath} = (1{,}1)$ et $\vec{\jmath} = (2{,}2)$.

16.6. Représentation paramétrique des droites

Nous avons vu comment représenter une droite de façon cartésienne. La connaissance des vecteurs permet de représenter une droite de façon paramétrique, ce qui est souvent plus intuitif en physique, par exemple lorsque la droite représente la trajectoire d'un objet. Le paramètre sera alors le temps.

Une droite du plan peut être décrite à l'aide d'un point $\overrightarrow{r_0}$ et d'un vecteur directeur $\vec{u}$.

Sa représentation paramétrique est :

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{r_0} + t\vec{u} \quad t \in \mathbb{R}$$

L'équation paramétrique pour une droite est généralement de la forme :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + by \end{cases}$$

où x_0 et y_0 sont les coordonnées du point initial de la droite et a et b les composantes du vecteur direction de la droite.

On comprend facilement que ce mode de représentation permet d'exprimer n'importe quel point le long de la droite en faisant varier la paramètre t, ce qui offre une grande flexibilité dans l'exploration de la droite. Ceci facilite aussi l'étude de points spécifiques (collision avec une autre trajectoire p. ex.) ou de déformations générées par l'évolution de paramètre. Bien sûr, cette paramétrisation est généralisable à des courbes bien plus complexes que la droite.

Soit une droite décrite par une équation cartésienne de la forme $Ax + y = C$. Pour la transcrire sous forme paramétrique, il convient d'abord d'exprimer y en fonction de x : $y = f(x)$.

Ensuite, il suffit de choisir un paramètre t en fonction duquel exprimer x et y. Les équations paramétriques de la droite pourront être écrites en remplaçant x par $x(t)$ et y par $y(t)$.

Exemple :

Soit la droite décrite par son équation cartésienne $2x - 3y = 6$.
Exprimer y *en fonction de* x : $y = \frac{2}{3}x - 2$
Choisissons t *tel que, par exemple*[35], $x(t) = 2t$.
Nous pouvons déduire $y = \frac{2}{3}(2t) - 2$
Et simplifier : $y = \frac{4}{3}t - 2$
En conclusion :

$$\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = \dfrac{4}{3}t - 2 \end{cases}$$

Le chemin inverse est tout aussi simple. Pour passer d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne, il convient d'exprimer t en fonction de l'une des deux variables, puis

[35] Ce choix dépend des contraintes liant t à x dans le contexte donné (par exemple la vitesse de l'objet considéré).

de substituer t dans l'autre équation, et enfin de simplifier les expressions obtenues.

Exemple :

Soit la droite décrite par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = \dfrac{4}{3}t - 2 \end{cases}$$

Exprimer par exemple t *en fonction de* x *:* $t = \frac{x}{2}$.

Substituer t *dans l'autre équation :* $y = \frac{4}{3}\left(\frac{x}{2}\right) - 2$

Et simplifier : $y = \frac{2}{3}x - 2$

Exercices :

(16.6.a) Donnez la forme paramétrique de la droite $2y = 6x - 5$

(16.6.b) Donner la forme cartésienne de la droite

$$\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = t + 3 \end{cases}$$

16.7. Les espaces vectoriels

Un **espace vectoriel** est un ensemble de vecteurs muni de deux opérations – l'addition et la multiplication par un scalaire – satisfaisant certaines propriétés (associativité, distributivité, existence d'un vecteur nul, etc.).

Les ensembles $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, munis des opérations usuelles, sont des exemples fondamentaux d'espaces vectoriels.

Il est intéressant de noter que l'ensemble des polynômes, assorti des opérations d'addition de polynômes et multiplication par un scalaire forme lui aussi un espace vectoriel. Dans le contexte de l'algèbre linéaire, les polynômes peuvent en effet être considérés comme des vecteurs d'un espace vectoriel spécifique, généralement appelé l'**espace vectoriel des polynômes**.

Cela peut paraître étrange, tant la façon dont nous avons abordé les polynômes semble lointaine de celle par laquelle nous avons présenté les vecteurs, mais souvenons-nous que ces derniers sont définis par deux caractéristiques : une direction (parfois décomposée en sens et direction) et une grandeur. Or, dans le contexte de l'algèbre linéaire, la direction d'un vecteur est souvent associée à ses composantes ou à ses coefficients. Dans le cas d'un polynôme, les coefficients des différentes puissances de la variable spécifient la direction dans laquelle le polynôme « pointe ». Ainsi, le polynôme $3x^2 - 2x + 1$ peut être associé à un vecteur dont les composantes sont $3, -2, 1$.

Quant à la magnitude, celle d'un vecteur dans l'algèbre linéaire est souvent mesurée par sa norme. Dans le cas des polynômes, leur norme peut être calculée de différentes manières. Par exemple, la « norme infinie » L^2 d'un polynôme $P(x)$ est donnée par $\|P\|_2 = \sqrt{\int |P(x)|^2 dx}$. [Nous ne donnons cette formule qu'en illustration, son analyse sortant du cadre de ce précis.]

Dotés d'une direction et d'une magnitude, les polynômes peuvent donc être considérés comme des vecteurs et définir leur propre espace vectoriel. Ce paradigme est utilisé couramment dans la correction des aberrations optiques, la reconnaissance de formes ou encore la modélisation 3D.

16.8. Équations vectorielles

Les **équations vectorielles** constituent un outil important de l'algèbre linéaire, offrant un cadre puissant pour la résolution de problèmes mathématiques dans divers domaines, tels que la géométrie analytique, la physique, l'ingénierie et l'informatique graphique. En utilisant les équations vectorielles, il devient possible de modéliser des phénomènes physiques tels que le mouvement d'un objet dans l'espace tridimensionnel.

Une équation vectorielle peut être résolue en exprimant chaque vecteur par ses composantes et en traduisant l'égalité vectorielle en un système d'équations scalaires.

Exemple :

Soit l'équation $\vec{u} + 2\vec{v} = 3\vec{w}$ *où* $\vec{u} = \binom{2}{3}$, $\vec{v}$ *est inconnu et* $\vec{w} = \binom{1}{4}$.

$\vec{v}$ *étant inconnu, nous noterons :* $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$.

Substituons les vecteurs par leurs composants : $\binom{2}{3} + 2\binom{v_1}{v_2} = 3\binom{1}{4}$.

Ce qui nous donne : $\binom{2}{3} + \binom{2v_1}{2v_2} = \binom{3}{12}$ *que nous pouvons simplifier :* $\binom{2+2v_1}{3+2v_2} = \binom{3}{12}$.

Puis, en égalisant les composantes des deux côtés de l'équation, nous obtenons un système plus familier d'équations scalaires :

$$\begin{cases} 2 + 2v_1 = 3 \\ 3 + 2v_2 = 12 \end{cases}$$

En résolvant ce système, nous trouvons les valeurs des composantes de $\vec{v}$ *:* $\vec{v} = \binom{1/2}{9/2}$.

16.9. Sous-espaces vectoriels et transformations linéaires

Un espace vectoriel peut disposer de sous-espaces. Un **sous-espace vectoriel** est un ensemble de vecteurs qui, lui-même, forme un espace vectoriel en respectant les mêmes propriétés que celles énumérées ci-dessus. Pour être un sous-espace, il doit également contenir le vecteur nul de l'espace vectoriel d'origine.

Par exemple, dans un espace vectoriel tridimensionnel, un plan passant par l'origine $(0,0,0)$ est un sous-espace vectoriel, car il satisfait aux règles d'addition de vecteurs et de multiplication par des scalaires *et* contient le vecteur nul. De même, une droite passant par l'origine est également un sous-espace.

Les **transformations linéaires**, quant à elles, sont des opérations qui préservent la structure vectorielle. Elles nous permettent de comprendre comment les vecteurs peuvent être modifiés tout en maintenant leur structure essentielle. Ces transformations jouent un rôle clé dans de nombreux domaines, de la géométrie à l'ingénierie, en passant par la physique et les sciences de l'informatique.

Concrètement, une transformation linéaire est une fonction mathématique qui opère sur des vecteurs dans un espace vectoriel et conserve certaines propriétés fondamentales de ces vecteurs. Plus précisément, une transformation linéaire T entre deux espaces vectoriels V et W est définie par les deux propriétés suivantes :

- *Additivité* : Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans V, $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$.
- *Homogénéité* : Pour tout vecteur $\vec{u}$ dans V, $T(c\vec{u}) = cT(\vec{u})$.

Exemple :

Soit V, l'espace vectoriel des vecteurs 2D et une transformation T qui effectue une réflexion des vecteurs par rapport à l'axe des ordonnées. En d'autres termes, elle change le signe de la composante y de chaque vecteur tout en laissant inchangée la composante x. Elle peut être définie comme suit :

$$T(\vec{u}) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans V, nous vérifions facilement que :

$$T(\overrightarrow{u+v}) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (u_1 + v_1) \\ -(u_2 + v_2) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix} = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$
$$T(\overrightarrow{u+v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

Ce qui atteste que la propriété d'additivité est respectée.
En outre, si nous reprenons le vecteur $\vec{u}$ *et un scalaire* c*, nous calculons que :*

$$T(c\vec{u}) = T\left(\begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} cu_1 \\ -cu_2 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = cT(\vec{u})$$

La propriété d'homogénéité est également satisfaite.
Ainsi, T *est bien une transformation linéaire.*

17. LES MATRICES

Tout comme les vecteurs, les **matrices** constituent des outils fondamentaux de l'algèbre linéaire. À première vue, elles peuvent sembler d'une nature plus rébarbative : des tableaux de nombres rangés en lignes et en colonnes, ce qui n'évoque pas immédiatement des directions, des bases ou des espaces. Pourtant, cette apparente rigidité cache un lien étroit avec les vecteurs : une matrice peut être vue comme un outil permettant de les organiser, de les transformer et de les faire interagir efficacement.

Les matrices fournissent ainsi un langage naturel pour représenter les systèmes d'équations linéaires et les transformations étudiées précédemment. Une fois ce lien établi, leur puissance devient évidente : elles permettent d'effectuer, de manière compacte et systématique, des calculs qui seraient autrement fastidieux. Les vecteurs indiquent les directions ; les matrices expliquent comment on les fait tourner, étirer ou combiner.

Cette efficacité explique le rôle central des matrices bien au-delà des mathématiques pures. Elles interviennent notamment dans la modélisation 3D des jeux vidéo et de la réalité virtuelle, l'analyse de circuits électriques, la mécanique des fluides, l'alignement des séquences d'ADN, la modélisation de réseaux neuronaux ou encore le traitement automatique du langage naturel. Derrière leurs faux airs de fonctionnaires, les matrices peuvent déplacer des montagnes.

Une matrice est donc un tableau ordonné d'éléments. Elle est organisée en m lignes et n colonnes. L'élément $a_{m,n}$ correspond à l'élément présent à la fois sur la ligne m et sur la colonne n.

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ x & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ -6 & 12 & \pi \end{bmatrix}$$

$$a_{2,3} = -1$$

Il est tout à fait possible qu'une matrice ne comporte qu'une seule ligne ou une seule colonne ; on parle alors respectivement de **vecteur ligne** ou de **vecteur colonne**.

Les matrices peuvent être utilisées afin de présenter de nombreux types d'information afin de leur offrir un traitement spécifique. Ainsi, les systèmes d'équations linéaires qui peuvent aisément être retranscrits sous forme matricielle[36].

Exemple :

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + y + z = 3 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow AX = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} ; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On remarque que X et B sont deux vecteurs colonnes.

---

36 Ceci permet la résolution de grands systèmes d'équations. Le détail de ces calculs sort largement d'un cours d'algèbre élémentaire.

17.1. Opérations simples sur les matrices

L'addition et la soustraction de matrices se font terme à terme. Ces opérations ne peuvent se faire que si les deux matrices ont strictement les mêmes dimensions.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

Autrement dit, si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, alors :

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i?j})$$

La multiplication d'une matrice par un scalaire se fait aussi terme à terme.

$$k \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

Autrement dit :

$$kA = (ka_{i,j})$$

En revanche, la multiplication d'une matrice A par une matrice B demande plus d'attention. Elle n'est possible que si le nombre de colonnes de A est identique au nombre de lignes de B.

Soit $C = A \times B$. Pour obtenir $c_{1,1}$, il faut multiplier élément par élément la *première* rangée de A par la *première* colonne de B, puis additionner les éléments obtenus. Pour obtenir $c_{1,2}$, il faut multiplier élément par élément la *première* rangée de A par la *deuxième* colonne de B, puis additionner les éléments obtenus… et ainsi de suite.

Exemple :

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times 5+2\times 7 & 1\times 6+2\times 8\\3\times 5+4\times 7 & 3\times 6+4\times 8\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}19 & 22\\43 & 50\end{bmatrix}$$

Il est clair que, sauf cas triviaux, il ne s'agit pas d'une opération commutative, et la matrice résultante aura le même nombre de lignes que A et le même nombre de colonnes que B.

Exercices :

Soit les matrices $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\4 & 0 & 5\end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix}5 & -1\\-4 & 0\\2 & 3\end{bmatrix}$

(17.1.a) Calculez $C=A\times B$.
(17.1.b) Calculez $D=B\times A$

17.2. Matrices transposées

La **transposée** d'une matrice est une opération fondamentale qui a de nombreuses applications en algèbre linéaire, mais aussi dans des processus d'optimisation de statistiques et dans des transformations géométriques telles que rotations ou réflexions, et en régression linéaire afin de calculer les paramètres optimaux à partir des données d'entrée et de sortie.

La transposée d'une matrice A se note ${}^{t}A$ et s'obtient simplement en intervertissant les lignes en colonnes.

$$({}^{t}A)_{i,j}=a_{j,i}$$

Exemple :

$$Si\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\ ;\ {}^{t}A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Il en découle que :

$$\boxed{{}^{t}\left({}^{t}A\right) = A}$$

Il convient de se souvenir que matrice et sa transposée ont les mêmes dimensions, pour retenir la transposée d'une multiplication de matrices :

$${}^{t}(AB) = {}^{t}B\ {}^{t}A \neq {}^{t}A\ {}^{t}B$$

17.3. Le déterminant

Le **déterminant** d'une matrice joue quant à lui un rôle comparable à celui du déterminant Δ d'une équation quadratique : il donne une indication précieuse sur une caractéristique de son élément. L'importance de cet élément en algèbre intermédiaire nous incite à en donner un furtif aperçu dans ce cours.

Le déterminant d'une matrice A se note $\det(A)$. En notation développée, il suffit de remplacer les crochets par des verticales. Il s'agit d'une valeur scalaire qui se calcule assez facilement pour une matrice 2×2 en calculant le produit des deux diagonales, puis en soustrayant celui de la diagonale montante de celui de la diagonale descendante.

Exemple :

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1 \times 4) - (2 \times 3) = -2$$

Exercices :

Calculez le déterminant des matrices suivantes.

(17.3.a💡) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(17.3.b💡) $B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

17.4. Méthode de Cramer

Notre connaissance des matrices va nous offrir une nouvelle méthode de résolution d'équations linéaires élaborée au XVIIIe siècle par Gabriel Cramer. Cette méthode est importante, car elle offre une manière systématique de résoudre des systèmes linéaires lorsque les conditions appropriées sont remplies. Cependant, elle n'est pas toujours la méthode la plus efficace pour résoudre de tels systèmes en pratique.

Soit un système de n équations à n inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = \lambda_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = \lambda_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = \lambda_n \end{cases}$$

Il convient d'abord de le représenter sous la forme d'un produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = \Lambda$$

Il faut ensuite calculer le déterminant de la matrice A. S'il est différent de zéro, la **méthode de Cramer** est applicable, sinon, le système n'a pas de solution unique.

Pour résoudre chaque inconnue, il faut remplacer une colonne de la matrice A par le vecteur colonne Λ (correspondant à la colonne de l'inconnue que vous résolvez) et calculer le déterminant de la nouvelle matrice résultante. Ceci doit être fait pour chaque inconnue, en gardant la matrice A inchangée.

La solution du système est donnée par les rapports des déterminants calculés dans le paragraphe précédent. Plus précisément, si l'on remplace la colonne i de A par Λ pour résoudre la $i^{ème}$ inconnue, la solution de cette inconnue est donnée par :

$$X_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

où A_i est la matrice obtenue en remplaçant la colonne i de A par Λ.

La méthode de Cramer est élégante, mais a ses limites. Elle n'est applicable que si le déterminant de la matrice A est non nul, ce qui signifie que le système a une solution unique. De plus, le calcul des déterminants peut être coûteux en termes de temps et de calcul, en particulier pour de grandes matrices. C'est pourquoi nous nous devons d'aborder une méthode plus performante dans les systèmes de plus de 4 équations avec 4 inconnues.

17.5. Matrice augmentée (méthode de Gauss)

En effet, Carl Friedrich Gauss a conçu une méthode de résolution plus efficace pour les grands systèmes dont les coefficients dans le premier membre sont explicitement donnés. La méthode de Cramer reste toutefois utile dans des grands systèmes où les coefficients du premier membre dépendent de paramètres, ce qui peut rendre la **méthode de Gauss** inapplicable.

La méthode de Gauss consiste à utiliser des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée du système pour la transformer en une forme échelonnée puis en une forme échelonnée réduite.

Une **matrice augmentée** est une représentation des coefficients d'un système d'équations linéaires sous forme de matrice, où chaque ligne de la matrice correspond à une équation du système et les colonnes contiennent les coefficients des variables ainsi que les termes constants. C'est simplement une manière compacte de représenter un système d'équations linéaires.

Une **forme échelonnée** d'une matrice est une disposition spéciale dans laquelle les éléments de la matrice sont arrangés de manière à ce que chaque ligne commence par plus de zéros que la ligne précédente. En d'autres termes, la forme échelonnée est obtenue en transformant la matrice de manière à ce que les coefficients principaux (les premiers éléments non nuls de chaque ligne) forment une séquence croissante de gauche à droite et que toutes les lignes de zéros soient situées en bas de la matrice.

Une matrice est donc en forme échelonnée si elle satisfait aux conditions suivantes :

- Toutes les lignes nulles, le cas échéant, sont situées en bas de la matrice.
- Dans chaque ligne non nulle, le coefficient principal (le premier coefficient non nul) est situé plus à droite que le coefficient principal de la ligne précédente.

Une matrice est sous **forme échelonnée réduite** si elle satisfait aux conditions suivantes :

- À chaque ligne, l'élément non nul le plus à gauche est 1 et les autres éléments de la colonne qui contient ce 1 sont tous nuls. Ce 1 est un pivot de la matrice.
- Le pivot de chaque ligne est à la droite des pivots des lignes supérieures.
- Les lignes ne contenant que des éléments nuls sont en bas de la matrice.

Toute matrice peut être transformée en sa matrice échelonnée réduite au moyen d'opérations élémentaires sur les lignes, à savoir :

- Permuter deux lignes ;
- Multiplier une ligne par une constante non nulle ;
- Ajouter à une ligne le multiple d'une autre ligne.

La matrice échelonnée réduite ainsi obtenue est unique.

Une fois les concepts de matrice augmentée et de forme échelonnée intégrés, la méthode gaussienne sera plus facilement compréhensible au moyen d'un exemple.

Exemple :

Soit le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + 3y + 4z = 11 \end{cases}$$

Nous le transcrivons sous forme d'une matrice augmentée :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 2 & 3 & | & 5 \\ 2 & 3 & 4 & | & 11 \end{bmatrix}$$

Soustrayons la ligne 1 de la ligne 2 afin d'obtenir la nouvelle ligne 2 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 2 & 3 & 4 & | & 11 \end{bmatrix}$$

Soustrayons maintenant 2 fois la ligne 1 de la ligne 3 pour obtenir la nouvelle ligne 3 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 7 \end{bmatrix}$$

À présent, soustrayons la ligne 2 de la ligne 1 pour obtenir une nouvelle ligne 1 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & 7 \end{bmatrix}$$

Enfin, soustrayons la ligne 2 de la ligne 3 afin d'obtenir la nouvelle ligne 3 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons en retranscrire le nouveau système suivant :

$$\begin{cases} x - z = -1 \\ y + 2z = 3 \\ \quad 0 = 4 \end{cases}$$

L'équation $0 = 4$ *étant manifestement fausse, nous en déduisons que le système initial n'a pas de solution.*

17.6. Valeurs propres et diagonalisation des matrices

Nous avons compris que les matrices peuvent représenter des vecteurs de différentes manières, en fonction du contexte mathématique et de la convention choisie. Par exemple, un vecteur ligne est une matrice ne comportant qu'une ligne unique, laquelle représente les composants d'un vecteur :

$$\vec{v} = [a, b, c] \Leftrightarrow [a \quad b \quad c]$$

Notons qu'il est toutefois plus courant de transposer la matrice pour en faire un vecteur colonne :

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

D'autres modes de représentation matricielle des vecteurs peuvent être adoptés.

Les valeurs propres et la diagonalisation des matrices sont des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire qui trouvent des applications dans divers domaines des mathématiques et des sciences.

Une **valeur propre** (*eigenvalue*) d'une matrice carrée A est un nombre réel λ tel qu'il existe un vecteur non nul $\vec{v}$ vérifiant :

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Comprendre les valeurs propres d'une matrice permet de comprendre ses propriétés de transformation linéaire.

Une façon de visualiser ce concept est d'imaginer une transformation linéaire qui s'applique sur des vecteurs, modifiant leur magnitude et leur direction. Certains vecteurs toutefois ne voient que leur magnitude changer, non leur direction. Nous les appelons des « vecteurs propres (*eigenvectors*) ». Les valeurs propres sont les facteurs d'échelle qui indiquent l'amplitude du changement de magnitude de ces vecteurs propres.

Les valeurs propres jouent un rôle central dans la diagonalisation des matrices que nous verrons ci-après, et sont également utilisées dans diverses applications, telles que l'analyse des modes de vibration, la détermination de la stabilité des systèmes dynamiques et la réduction de dimension de données. Ces valeurs propres sont essentielles dans de nombreux domaines, car elles permettent de réduire drastiquement la complexité de certaines opérations mathématiques.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous déterminons la matrice moins λ fois l'identité :

$$A - \lambda I = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Nous calculons ensuite le déterminant :

$$(2-\lambda)(1-\lambda) - (-1).4 = \lambda^2 - 3\lambda + 6$$

La résolution de l'équation du second membre donne comme racines :

$$\lambda_1 = 2\,;\ \lambda_2 = 3$$

Pour chaque valeur propre, nous devons trouver les vecteurs propres correspondants. Pour $\lambda_1 = 2$, nous devons résoudre le *système d'équations* $(A - 2I)\overrightarrow{v_1} = 0$ *où* $\overrightarrow{v_1}$ *est le vecteur propre correspondant :*

$$(A - 2I)\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nous trouvons ainsi le vecteur propre $\overrightarrow{v_1}$ *associé à* $\lambda_1 = 2$.

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Procédant de la sorte pour la deuxième racine, nous déterminons la valeur de $\overrightarrow{v_2}$ *:*

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

La matrice A possède donc deux valeurs propres ($\lambda_1 = 2$ *et* $\lambda_2 = 3$*) dont les vecteurs correspondants sont* $\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

On le voit, le calcul des valeurs propres est un processus lourd pour les matrices de grande taille et l'utilisation d'outils informatiques est en pratique indispensable.

La **diagonalisation d'une matrice**[37] est une procédure qui permet de simplifier une matrice complexe en une forme plus gérable tout en préservant ses propriétés essentielles. En d'autres termes, il s'agit de trouver une matrice diagonale similaire à la matrice d'origine, c'est-à-dire une matrice dont tous les éléments sont nuls à part ceux de la diagonale principale (descendante, de gauche à droite).

Une façon de visualiser ce concept est d'imaginer à nouveau une transformation linéaire qui s'applique sur des vecteurs, modifiant leur magnitude et leur direction. Cette transformation linéaire peut être représentée sous forme matricielle, mais souvent, cette matrice

---

[37] À ne pas confondre avec les matrices échelonnées qui se caractérise avec seulement des zéros en-dessous de la diagonale principale.

est complexe. Sa diagonalisation la rend nettement plus simple, permettant de visualiser la façon dont elle agit sur les vecteurs.

Formellement, une matrice carrée A est diagonalisable si elle peut être exprimée sous la forme $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale (tous les éléments hors de la diagonale sont nuls) et P est est une matrice inversible dont les colonnes sont les vecteurs propres correspondants aux valeurs propres de A.

Par conséquent, lorsqu'une matrice est diagonalisée, elle peut être décomposée en un produit de trois matrices : une matrice contenant les vecteurs propres, une matrice diagonale contenant les valeurs propres correspondantes, et l'inverse de la matrice contenant les vecteurs propres. Cette décomposition simplifie considérablement le calcul des puissances de la matrice.

Exemple :

Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Nous en trouvons les valeurs propres :

$$\lambda_1 = 4\ ;\ \lambda_2 = 2$$

Nous construisons la matrice diagonalisée D *en plaçant ces valeurs propres sur la diagonale principale :*

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Pour vérifier l'exactitude des calculs, nous cherchons ensuite les vecteurs propres correspondants :

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\ ;\ \overrightarrow{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Puis nous construisons alors une matrice P *en plaçant simplement les vecteurs propres dans ses colonnes :*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Et nous calculons P^{-1} *:*

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculons $P^{-1}AP$:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Nous constatons que $P^{-1}AP = D$, ce qui vérifie la diagonalisation de la matrice A.

Ici plus encore, la diagonalisation des matrices est généralement confiée à des outils informatiques.

Exercices :

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

(17.7.a💡) Déterminez ses valeurs propres.

(17.7.b💡) Déterminez sa matrice diagonale.

18. LOGIQUE

La **logique** constitue l'une des pierres angulaires des mathématiques et, plus largement, de la pensée rationnelle. En mathématiques, elle éclaire les démonstrations et structure les raisonnements, mais son influence dépasse largement le cadre académique. On la retrouve en philosophie, en ingénierie, dans les sciences cognitives et partout où il s'agit d'argumenter, de décider et de donner du sens au monde.

La logique ne se limite pas à dire si une démonstration est correcte : elle intervient aussi, souvent de manière moins formelle, dans la façon dont nous construisons nos discours et nos pensées.

Ce chapitre se propose d'examiner les fondements de la logique mathématique, tout en gardant à l'esprit cette double dimension : un outil rigoureux indispensable aux mathématiques, et un cadre plus général pour analyser la robustesse des raisonnements.

18.1. Logique propositionnelle

Avant tout, il convient de définir un terme qui ne recoupe pas sa signification dans le langage courant. Une **proposition** est une déclaration qui peut être soit vraie, soit fausse, mais pas les deux en même temps. Elles seront par la suite représentées par une lettre majuscule Par exemple, P pourrait représenter la proposition « Il pleut ».

Chaque proposition dispose d'une valeur de vérité : *vrai* ou *faux*.

La logique propositionnelle traite des propositions et des opérations logiques qui peuvent y être appliquées. Tout comme les opérations arithmétiques nécessitent des opérateurs tels que l'addition ou la multiplication, les opérations logiques disposent d'opérateurs, de **connecteurs logiques**, dont nous examinerons les plus élémentaires :

- *Négation* (NON) : inverse la valeur de vérité d'une proposition. Il se note $\neg$. Si P est vrai, alors $\neg P$ est faux. (Notons que ce connecteur est parfois noté $\overline{P}$.)

- *Conjonction* (ET) : combine deux propositions et est vrai si chacune est vraie. Il se note $\wedge$. Si P représente « Il pleut » et Q représente « Il fait froid », alors $P \wedge Q$ représente « Il pleut ET il fait froid. »

- *Disjonction* (OU) : combine deux propositions et est vrai si *au moins* l'une des propositions est vraie. Il se note $\vee$. Si P représente « Il pleut » et Q représente « Il neige », alors $P \vee Q$ représente « Il pleut OU il neige. »

- *Implication* (SI… ALORS) : produit une proposition vraie à moins que la première proposition d'entrée soit vraie et que la seconde soit fausse. Il se note$\Rightarrow$. Si P représente « Il pleut » et Q représente « J'utilise un parapluie », alors $P \Rightarrow Q$ signifie « S'il pleut, alors j'utilise un parapluie ». Cette proposition est fausse uniquement s'il pleut et que je n'utilise pas de parapluie.

- *Équivalence* (SI ET SEULEMENT SI) : produit une proposition vraie lorsque les deux propositions d'entrée sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses. Il se note $\Leftrightarrow$. Si P représente « Il pleut » et Q représente « J'utilise un parapluie », alors $P \Leftrightarrow Q$ signifie « Il pleut si et seulement si j'utilise un parapluie ». Cette proposition est vraie lorsque les deux conditions sont les mêmes.

Les **tables de vérité** permettent de définir un connecteur logique en visualisant l'ensemble des résultats possibles de leur application.

Négation :

P	$\neg P$
Vrai	*Faux*
Faux	*Vrai*

Conjonction :

P	Q	$P \wedge Q$
Vrai	*Vrai*	*Vrai*
Vrai	*Faux*	*Faux*
Faux	*Vrai*	*Faux*
Faux	*Faux*	*Faux*

Disjonction :

P	Q	$P \vee Q$
Vrai	*Vrai*	*Vrai*
Vrai	*Faux*	*Vrai*
Faux	*Vrai*	*Vrai*
Faux	*Faux*	*Faux*

Implication :

P	Q	$P \Rightarrow Q$

Vrai	*Vrai*	*Vrai*
Vrai	*Faux*	*Faux*
Faux	*Vrai*	*Vrai*
Faux	*Faux*	*Vrai*

Équivalence :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
Vrai	*Vrai*	*Vrai*
Vrai	*Faux*	*Faux*
Faux	*Vrai*	*Faux*
Faux	*Faux*	*Vrai*

Remarque importante :

Lorsqu'une implication est utilisée dans un contexte où P est faux, l'implication $P \to Q$ est toujours considérée comme vraie, quel que soit Q. Cela peut sembler contre-intuitif.

L'implication est définie comme « ne pas violer la règle P vrai implique Q vrai ». Si P est faux, la condition L'implication est définie comme « ne pas violer la règle P vrai implique Q vrai ». Si P est faux, la condition $P \to Q$ n'est jamais violée, car il n'y a rien à vérifier.

Exemple :

> *Considérons P : « Il pleut », et Q : « Le sol est mouillé ».*
> *Si P est faux (il ne pleut pas), l'implication $P \to Q$ reste vraie, même si Q (le sol est mouillé) est faux. Cela correspond au fait que P étant faux, l'implication $P \to Q$ ne fait aucune affirmation sur Q.*

Une **formule propositionnelle** (ou expression propositionnelle) est une expression correctement formée qui possède une valeur de vérité. Si les valeurs de toutes les variables propositionnelles dans une formule propositionnelle sont connues, la valeur de vérité de la formule propositionnelle pourra être déterminée.

À l'instar de l'arithmétique, la logique propositionnelle peut produire des formules complexes connectant de nombreuses propositions de façon hiérarchique. L'utilisation de parenthèses est alors requise afin de déterminer l'ordre d'évaluation des connecteurs logiques.

Exemple :

Si nous voulons étudier une formule propositionnelle telle que $(P \vee Q) \wedge R$, *nous pouvons dresser la table de vérité suivante*[38] *:*

P	Q	R	$(P \vee Q) \wedge R$
Vrai	*Vrai*	*Vrai*	*Vrai*
Vrai	*Vrai*	*Faux*	*Faux*
Vrai	*Faux*	*Vrai*	*Vrai*
Vrai	*Faux*	*Faux*	*Faux*
Faux	*Vrai*	*Vrai*	*Vrai*
Faux	*Vrai*	*Faux*	*Faux*
Faux	*Faux*	*Vrai*	*Faux*
Faux	*Faux*	*Faux*	*Faux*

[38] Pour « (il pleut ou il fait froid) et il neige. » par exemple

Une formule propositionnelle qui est vraie pour toutes les combinaisons possibles de valeurs de vérité de ses propositions est une **tautologie**.

L'on soupçonne aisément que certaines formules propositionnelles complexes peuvent être simplifiées, l'exemple le plus simple étant probablement la double négation :

$$\neg(\neg P) = P$$

Mais l'on constate aussi, par exemple, que la table de vérité de $\neg(P \wedge \neg Q) \wedge (Q \wedge \neg P)$ est identique à celle de $P \Leftrightarrow Q$. Il existe dès lors des lois d'équivalence qui seront utiles, par exemple, pour simplifier des formules complexes.

Certaines sont évidentes :

$$P \Leftrightarrow (P \wedge P)$$
$$P \Leftrightarrow (P \vee P)$$
$$(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$$
$$(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$$
$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P)$$
$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

Il en existe de nombreuses autres, mais il convient particulièrement de connaître les **lois de Morgan** qui permettent élégamment de transformer une conjonction en disjonction et vice-versa :

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$$
$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$$

Exercices :

(18.1.a) Écrire, avec les colonnes intermédiaires, la table de vérité de la formule $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R) \Rightarrow (Q \vee R)$.

(18.1.b) Comment traduire la phrase suivante en formule propositionnelle : « S'il travaille en soupirant, c'est qu'il n'est pas joyeux. »

(18.1.c💡) Sans utiliser de table de vérité, c'est-à-dire de façon exclusivement syntaxique, démontrez que la formule suivante est une tautologie : $(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee \neg Q)$

18.2. Calcul des prédicats

L'algèbre booléenne, développée par George Boole au milieu du XIXe siècle, a été l'une des premières formalisations puissantes de la logique formelle et a joué un rôle essentiel dans le développement des bases logiques de l'informatique. Cependant, le **calcul des prédicats** mis en place par Gottlob Frege trente ans plus tard dispose d'une sémantique beaucoup plus riche qui lui offre plus d'expressivité et permet d'aborder des problèmes logiques nettement plus complexes.

Nous pouvons utiliser un célèbre syllogisme pour illustrer la formalisation de Frege :

Socrate est mortel	*s* est *m*	$M(s)$
Tout est mortel	tous les *x* sont tels que *x* est *m*	$\forall x\ M(x)$
Il existe des mortels	il existe des *x* tels que *x* est *m*	$\exists x\ M(x)$
Tous les hommes sont mortels	tous les *x* sont tels que si *x* est *h*, alors *x* est *m*	$\forall x\ \big(H(x) \Rightarrow M(x)\big)$

Les **quantificateurs** tels que « pour tout » (∀) et « il existe » (∃) permettent d'exprimer des généralisations et des existences, ce qui était impossible en logique propositionnelle. De plus, les prédicats permettent de représenter des propriétés et des relations entre des objets.

Un **prédicat** est une expression qui contient une ou plusieurs variables ou et/ou constantes, et exprime une relation ou une propriété qui peut être vraie ou fausse en fonction des valeurs spécifiques que l'on attribue aux variables. C'est une expression qui devient une proposition logique une fois que toutes ses variables ont reçu une valeur spécifique.

- « 4 est un nombre pair » est une proposition ;
- « x est un nombre pair » est un prédicat tant que x reste inconnu.

> *La* ***syntaxe*** *du calcul des prédicats décrit la manière dont les formules sont construites à partir de symboles.*
>
> *La* ***sémantique*** *précise la manière dont ces formules sont interprétées dans un domaine donné et permet de définir les notions de vérité, de modèle et de validité.*

Nous comprenons que la logique de Frege ne fait pas qu'ajouter des quantificateurs et des variables : ses unités sémantiques ne sont plus des propositions vraies ou fausses, mais des **fonctions** qui renvoient à l'une de ces deux valeurs, et c'est précisément là que ces quantificateurs jouent un rôle essentiel. Nous pouvons maintenant les examiner plus formellement.

- $\forall$ est le **quantificateur universel** dont le rôle principal est de rendre une propriété universelle : $\forall x\big(P(x)\big)$ signifie que la propriété $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x.
- $\exists$ est le **quantificateur existentiel** qui exprime l'existence d'éléments satisfaisant une propriété : $\exists x\big(P(x)\big)$ signifie qu'il existe au moins un élément x pour lequel la propriété $P(x)$ est vraie.

Ces quantificateurs peuvent être combinés pour exprimer des énoncés plus complexes et plus nuancés. Par exemple, $\forall x \exists y \big(P(x, y)\big)$ signifie que, pour tout élément x, il existe au moins un élément y tel que la propriété $P(x, y)$ est vraie.

La syntaxe des prédicats se limite donc aux éléments suivants :

- Les propositions et connecteurs de la logique propositionnelle ;
- Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$;
- Un ensemble infini de symboles de constantes $C = \{a, b, c \dots\}$;
- Un ensemble infini de symboles de variables $V = \{x, y, z \dots\}$;
- Un ensemble infini de symboles de prédicats $P = \{A(\dots), B(\dots), C(\dots) \dots\}$

La sémantique repose sur quatre règles principales :

- Chaque variable, fonction, prédicat et constante a une signification dans un domaine donné D d'interprétation. L'interprétation est une fonction qui attribue des valeurs aux variables et spécifie comment les fonctions et les prédicats sont évalués.
- Une formule est vraie si elle est vraie dans toutes les interprétations possibles. Les formules qui sont vraies dans toutes les interprétations sont considérées comme valides.
- Une interprétation qui rend une formule vraie est appelée un modèle de cette formule.
- Si deux formules ont la même valeur de vérité dans toutes les interprétations, elles sont considérées comme équivalentes.

Pouvant traiter d'un nombre infini d'objets, le calcul des prédicats ne peut plus faire appel à des tables de vérité, mais à des tableaux sémantiques.

Les **tableaux sémantiques** constituent une méthode générale pour étudier la validité des formules du calcul des prédicats. Leur étude détaillée relève de la logique formelle avancée ; les exemples présentés ici visent uniquement à en illustrer le principe.

En voici la méthode générale :

1. On commence par *décomposer* la formule en ses parties constitutives, telles que les connecteurs logiques et les quantificateurs afin que chaque partie soit traitée individuellement.
2. Pour chaque partie de la formule, on crée des *branches* : chaque branche représente une possibilité pour les valeurs des variables ou des termes.
3. On affecte alors des valeurs aux variables dans chaque branche, en gardant à l'esprit les contraintes énoncées par les quantificateurs. Par exemple, si une formule contient $\forall x$, cela signifie qu'il faut considérer toutes les valeurs possibles pour x dans cette branche. Si elle contient $\exists y$, cela implique qu'il suffit qu'il existe une valeur de y qui satisfait la formule.
4. On évalue ensuite la formule dans chaque branche en fonction des valeurs attribuées aux variables.
5. Ce processus doit être itéré pour explorer toutes les combinaisons possibles de valeurs pour les variables.
6. Enfin, si dans chaque branche la formule reste vraie, alors la formule globale est considérée comme valide. Sinon, si au moins une branche conduit à une fausseté, la formule est considérée comme invalide.

Exemple :

Soit la formule $\forall x \exists y\big(P(x) \land \neg Q(y)\big)$.
Nous décomposons la formule : $\forall x$ *suivi de* $\exists y$ *puis de* $\big(P(x) \land \neg Q(y)\big)$.
Affectons à la variable x *la constante* a *et* b *à* y.
Commençons par une branche dans laquelle nous évaluons $\big(P(a) \land \neg Q(b)\big)$ *avec les valeurs attribuées. Si* $P(a)$ *est vrai et* $Q(b)$ *faux, alors* $\big(P(a) \land \neg Q(b)\big)$ *est vrai.*
Créons alors une nouvelle branche à partir de la branche précédente où nous attribuons une nouvelle valeur (c*) à* y.
Nous y évaluons $\big(P(a) \land \neg Q(c)\big)$ *avec les valeurs attribuées. Si* $P(a)$ *est vrai et* $Q(c)$ *faux, alors* $\big(P(a) \land \neg Q(c)\big)$ *est vrai.*
Comme il n'existe pas d'autre variable quantifiée universellement, il n'y a plus de nouvelle branche à créer.
Comme la formule est vraie dans toutes les branches, elle est valide : quelle que soit la valeur de x*, il existe toujours au moins une valeur de* y *telle que* $\forall x \exists y\big(P(x) \land \neg Q(y)\big)$ *est vrai.*

Exercice :

(18.2.a) La formule suivante est-elle valide : $\forall x \exists y\big(P(x) \land Q(y)\big)$?

18.3. Méthodes de preuves

La principale utilisation de la logique est de permettre la construction de méthodes de preuves. En voici les principales…

1. Preuve directe

La preuve directe consiste à démontrer une implication $P \rightarrow Q$ en supposant P vrai, puis en montrant, par une suite d'étapes logiques, que Q en découle nécessairement.

2. Preuve contraposée

La preuve contraposée repose sur l'équivalence logique entre $P \rightarrow Q$ et $\neg Q \rightarrow \neg P$. Pour prouver $P \rightarrow Q$, il peut être plus simple de montrer que si Q est faux ($\neg Q$), alors P est également faux ($\neg P$).

3. Preuve par l'absurde

La preuve par l'absurde consiste à supposer que $P \wedge \neg Q$ est vrai, puis à montrer que cela conduit à une contradiction logique. Par exemple, pour prouver que $\sqrt{2}$ est irrationnel, on suppose d'abord qu'il est rationnel, ce qui permet d'écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers sans facteur commun. En développant cette hypothèse, on montre qu'elle mène à une contradiction (par exemple, p et q doivent être à la fois pairs, ce qui viole leur propriété de simplification maximale). Cette méthode est puissante et souvent utilisée pour des résultats difficiles à établir directement, bien qu'elle puisse sembler contre-intuitive pour certains, car elle repose sur une négation indirecte.

4. Preuve par contre-exemple

Cette méthode vise à réfuter une proposition universelle ($\forall x, P(x)$) en fournissant un seul contre-exemple où $P(x)$ est faux. Par exemple, pour montrer que « tous les nombres sont pairs » est une assertion fausse, il suffit de donner $x = 3$, un nombre impair, comme contre-exemple. Cette approche est rapide et efficace pour démontrer qu'une assertion est incorrecte. Cependant, elle ne peut pas être utilisée pour prouver qu'une assertion universelle est vraie.

5. Preuve par induction (ou raisonnement par récurrence)

La preuve par induction est une méthode puissante utilisée notamment pour prouver des propriétés concernant les entiers naturels. Elle repose sur quatre étapes :

- On démontre que 1 a la propriété P.
- On fait l'hypothèse qu'un entier n quelconque a la propriété P.
- On démontre alors, en se fondant sur cette hypothèse, que $n + 1$ a la propriété P.
- On en conclut que tous les entiers ont la propriété P.

Cette méthode est particulièrement adaptée aux énoncés concernant les suites et séries, mais elle est limitée aux contextes où les entiers naturels jouent un rôle.

18.4. Logique floue

La **logique floue** constitue une extension de la logique classique dans laquelle la valeur de vérité n'est plus binaire, mais graduée entre 0 et 1.

Elle est principalement utilisée dans des contextes appliqués (ingénierie, intelligence artificielle) et ne relève pas de la logique mathématique classique. Les notions introduites ici le sont à titre illustratif.

Les **fonctions d'appartenance** sont des outils fondamentaux qui permettent de quantifier le degré d'appartenance d'un élément à un ensemble flou. Elles attribuent un nombre entre 0 et 1 à chaque élément, indiquant dans quelle mesure cet élément appartient à l'ensemble flou. Plus ce nombre est proche de 1, plus l'appartenance est forte.

Par exemple, l'on pourrait définir l'ensemble des jeunes adultes d'une région donnée en donnant des degrés d'appartenance en fonction de tranches d'âge : par exemple 1 de 18 à 25 ans, 0,75 de 26 à 32 ans, 0,25 de 33 à 45 ans et 0,1 de 45 à 60 ans et 0 au-delà.

Ainsi, nous pouvons formaliser une fonction d'appartenance qui pourra définir l'ensemble flou imaginé. Soit l'ensemble flou des jeunes adultes J dans l'univers des âges X défini par une fonction d'appartenance μ_J :

$$\mu_J(x) = \begin{cases} 1\ si\ 18 \leq x \leq 25 \\ 0{,}75\ si\ 26 \leq x \leq 32 \\ 0{,}25\ si\ 33 \leq x \leq 45 \\ 0{,}1\ si\ 46 \leq x \leq 60 \\ 0\ si\ x \geq 61 \end{cases}$$

Les opérations applicables sur les ensembles seront ici de mise, mais avec quelques correctifs qui permettront de manipuler les ensembles flous de manière à modéliser l'incertitude et la nuance présentes dans de nombreuses applications pratiques.

L'**union floue** permet de combiner deux ensembles flous pour obtenir un nouvel ensemble flou qui inclut tous les éléments ayant une appartenance élevée dans au moins l'un des ensembles d'origine. Elle est définie comme :

$$(A \cup B)(x) = max\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big)$$

L'**intersection floue** permet de combiner deux ensembles flous pour obtenir un nouvel ensemble flou qui inclut uniquement les éléments ayant une appartenance élevée dans les deux ensembles d'origine. Elle est définie comme :

$$(A \cap B)(x) = min\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big)$$

Des opérations plus spécifiques permettent de dilater ou de concentrer l'ensemble flou d'un facteur r :

La **dilatation floue** est définie comme :

$$Dilatation_r(A)(x) = \mu_A\left(\frac{x}{r}\right)$$

La **concentration floue** est définie comme :

$$Concentration_r(A)(x) = \mu_A(rx)$$

La **composée floue** est une opération plus complexe qui permet de combiner plusieurs ensembles flous et leurs fonctions d'appartenance pour obtenir un résultat complexe. Elle est utilisée lorsque plusieurs ensembles flous sont liés par une relation (par exemple la taille et le poids des membres d'une population) et qu'il faut déterminer dans quelles mesures cette relation influence l'appartenance à un nouvel ensemble flou. Plus la valeur de la composée floue est élevée, plus l'impact de la relation entre les ensembles flous d'origine sur l'ensemble flou résultant est fort. Elle est définie comme :

$$C(x) = max_y\big(min(\mu_A(y), \mu_B(x))\big)$$

où :

- $\mu_A(y)$ est la fonction d'appartenance de l'ensemble flou A en fonction de y ;
- $\mu_B(x)$ est la fonction d'appartenance de l'ensemble flou B en fonction de x.

Exercice :

(18.3.a) Supposons que A représente la satisfaction des clients dans un restaurant, et B la qualité des plats servis. Les fonctions d'appartenance sont définies de la sorte :

$$A: \begin{cases} 0{,}3 \text{ pour une satisfaction faible} \\ 0{,}8 \text{ pour une satisfaction moyenne} \\ 1 \text{ pour une qualité de plats élevée} \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} 0{,}2 \text{ pour une qualité de plats médiocre} \\ 1{,}0 \text{ pour une qualité de plats excellente} \end{cases}$$

Calculez la composée floue C, qui représente la qualité globale de l'expérience au restaurant en considérant à la fois la satisfaction des clients et la qualité des plats.

19. STRUCTURES ALGÉBRIQUES

La compréhension des **structures algébriques** marque une étape importante dans l'étude de l'algèbre. Il s'agit d'un domaine nettement plus abstrait que ce que nous avons rencontré jusqu'ici, et que nous ne ferons qu'esquisser : son développement relève de l'algèbre supérieure. Le changement de perspective qui s'opère ici peut dérouter, mais il n'a rien d'alarmant. Il s'agit surtout de prendre un peu de recul.

Les structures algébriques jouent un rôle de charpente : elles permettent de rassembler sous un même cadre des objets qui semblaient jusque-là distincts. En cessant de multiplier les règles particulières, on commence à comprendre ce qui fait vraiment l'unité de l'algèbre. Ce n'est pas tant une nouvelle technique qu'une nouvelle manière de regarder ce que l'on connaît déjà.

Formellement, une structure algébrique se décrit comme un ou plusieurs ensembles munis d'opérations satisfaisant certaines propriétés. Cette définition volontairement large est précisément ce qui lui donne sa puissance.

Nous avons d'ailleurs déjà posé le pied sur ce territoire sans y prêter attention : lorsque nous avons étudié les espaces vectoriels, ou considéré les polynômes comme des vecteurs, nous étions déjà en pleine algèbre structurale. Les espaces vectoriels en constituent une classe essentielle. Ce chapitre propose d'en rencontrer quelques autres et d'esquisser les catégories qui permettent de les organiser. L'objectif n'est pas d'accumuler, mais de comprendre comment tout cela tient ensemble.

19.1. Opérations, fonctions et lois de compositions

Les opérations telles que l'addition ou la soustraction sont appréhendables par les enfants dès leur scolarisation, mais comment définir ce qu'est une opération et en quoi se différencie-t-elle d'une fonction ?

Nous avons vu qu'une **fonction** est une relation entre deux ensembles, où chaque élément du premier ensemble (domaine) est associé à un élément unique du deuxième ensemble (codomaine). Une fonction peut être vue comme une règle qui assigne à chaque élément d'entrée un élément de sortie, en manière telle que chaque élément du domaine est associé à un seul élément du codomaine dans une fonction donnée.

Une **opération** est parfois définie comme une fonction particulière qui prend un ou plusieurs éléments d'un ensemble et renvoie un élément du même ensemble. Toutefois, la division d'un nombre entier par un autre peut renvoyer un élément d'un autre ensemble, celui des nombres rationnels. À ce stade, il semble donc préférable d'oublier le terme d'opération et d'introduire un nouveau concept…

Une **loi de composition** est une règle qui associe deux éléments d'un ensemble pour en produire un troisième. Elle est dite *interne* si l'élément produit appartient au même ensemble (addition et multiplication de nombre réels p. ex.) ou *externe* sinon (multiplication matricielle puisque les éléments considérés appartiennent à deux matrices distinctes p. ex.).

Une **loi de composition** sur un ensemble E est une fonction qui associe à chaque couple (x, y) d'éléments de E un élément de E. Autrement dit, une loi de composition interne sur E est une application :

$$* : E \times E \to E$$

L'addition, la soustraction et la multiplication sur $\mathbb{R}$ sont toutes des fonctions. La différence essentielle entre ces opérations tient non à leur statut de fonction, mais aux propriétés qu'elles satisfont (associativité, existence d'un neutre, d'inverses, etc.).

19.2. Groupes

Métaphoriquement, un **groupe** mathématique peut être vu comme un orchestre, c'est-à-dire un ensemble d'éléments distincts, mais qui interagissent de manière spécifique et coordonnée afin de produire un résultat cohérent.

Plus formellement, un groupe G est un ensemble non vide muni d'une loi de composition[39] $*$ telle que les propriétés suivantes sont satisfaites :

- *Associativité* : Pour tous les éléments a, b, et c dans G, l'opération * est associative. $(a * b) * c = a * (b * c)$.
- *Existence de l'élément neutre* : Il existe dans G un élément neutre e tel que, pour tout a dans G, $a * e = e * a = a$.
- *Existence de l'inverse* : Pour chaque élément a dans G, il existe un élément b de G tel que $a * b = b * a = e$ où e est l'élément neutre. b est appelé l'*inverse* de a.

Le groupe est notamment un outil très pratique pour décrire les symétries de certains objets géométriques comme le *Rubik's Cube* par exemple.

[39] Une loi de composition est une fonction qui prend deux éléments d'un ensemble et renvoie un élément de cet ensemble.

Exemples :

- *L'ensemble des réels non nuls* $\mathbb{R}^*$ $(\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\})$ *forme un groupe avec la multiplication. L'élément neutre est 1 et chaque nombre réel non nul a un inverse.*
- *L'ensemble des entiers relatifs* $\mathbb{Z}$ *forme un groupe avec l'addition : l'élément neutre est* 0*, et chaque entier* a *a un inverse,* $-a$*.*
- *Les rotations d'un pentagone régulier qui le laissent invariant forment un groupe cyclique d'ordre 5.*
- *Dans le groupe symétrique* S_n *(l'ensemble des permutations d'un ensemble de* n *éléments), l'opération est la composition de permutations. L'élément neutre est l'identité, et chaque permutation a une permutation inverse.*

Certains groupes peuvent être décomposés en sous-groupes. Sans proposer une démonstration formelle, nous le ressentons en constatant que certaines combinaisons opérées sur le *Rubik's Cube* mènent à des modifications que d'autres combinaisons auraient pu amener. Ou encore que certaines opérations de symétrie axiales opérées sur le pentagone régulier auraient pu être réalisées par des rotations.

En revanche, certains groupes ne sont pas décomposables en sous-groupes, ce sont les **groupes simples**. C'est le cas de $\mathbb{Z}_5$. Ces groupes simples sont en quelque sorte aux groupes ce que les nombres premiers sont aux entiers : des briques fondamentales, en nombre infini, permettant de construire tous les autres éléments de leur ensemble. Leur étude a généré ce qui est actuellement le plus grand théorème de l'histoire des mathématiques[40] : *le théorème de classification des groupes finis.*

[40] Il consiste en plusieurs dizaines de milliers de pages publiées dans cinq cent articles par plus de cent mathématiciens.

Exercices :

(19.1.a💡) $\mathbb{R}$ forme-t-il un groupe sous la multiplication ?

(19.1.b💡) Considérons l'ensemble $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et l'opération binaire * définie par $a * b = (a + b) mod\ 6$. $G *$ forme-t-il un groupe ?

19.3. Semi-groupes

Un **semi-groupe** est un ensemble muni d'une loi de composition associative, sans exigence d'élément neutre ni d'inverses.

Exemple :

$(\mathbb{N}^*, +)$ *est un semi-groupe : l'addition est associative, mais il n'existe pas d'élément neutre dans* $\mathbb{N}^*$.

19.4. Groupes abéliens

Un **groupe abélien** est une structure algébrique qui combine les propriétés d'un groupe avec une propriété supplémentaire : la commutativité.

Exemple :

L'ensemble des nombres entiers avec l'opération d'addition $(\mathbb{Z}, +)$*forme un groupe abélien, car, pour tout* a, b *et* c *dans* $\mathbb{Z}$ *:*

- *Associativité :* $(a + b) + c = a + (b + c)$
- *Existence de l'élément neutre :* $a + 0 = 0 + a = a$
- *Existence de l'inverse :* $a + (-a) = (-a) + a = 0$
- *Commutativité :* $a + b = b + a$

19.5. Anneaux et corps

L'étude des **anneaux** et des **corps** constitue une avancée significative dans l'exploration des structures algébriques, et confine à l'algèbre avancée. Après avoir étudié les groupes, qui sont des ensembles munis d'une opération binaire, nous nous tournons maintenant vers des structures plus riches et plus complexes. Les anneaux et les corps ont des applications importantes dans de nombreux domaines, notamment l'algèbre linéaire, la géométrie, la théorie des nombres, la cryptographie et la physique.

Un **anneau** est un ensemble R muni de deux lois de composition interne, l'addition et la multiplication, qui satisfont aux propriétés de ces opérations sur les entiers relatifs $\mathbb{Z}$, à savoir :

- *Addition associative* : pour tout a, b et c dans R, $(a+b)+c=a+(b+c)$.
- *Élément neutre de l'addition* : pour tout a dans R, $a+0=0+a=a$.
- *Inverses additifs* : pour chaque élément a de R, il existe un inverse additif (ou élément opposé) noté $-a$ tel que $a+(-a)=(-a)+a=0$.
- *Multiplication associative* : pour tout a, b et c dans R, $(a*b)*c=a*(b*c)$.
- *Distribution de la multiplication par rapport à l'addition* : pour tout a, b et c dans R, $a*(b+c)=a*b+a*c$ et $(b+c)*a=(b*a)+(c*a)$.

Exemples :

- *Un exemple concret d'anneau est l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ avec les opérations d'addition et de multiplication habituelles :* $(\mathbb{Z},+,.)$.

- *Un autre exemple est l'anneau des entiers modulo* n *:* $(\mathbb{Z}_n, +, .)$. *Dans cet anneau, l'addition et la multiplication sont définies modulo* n. *Cela signifie que lorsque vous effectuez des opérations d'addition ou de multiplication, vous prenez le reste de la division par* n *du résultat. Si nous prenons l'anneau* $(\mathbb{Z}_5, +, .)$, *nous avons les éléments suivants :*
  - *Les éléments de* $\mathbb{Z}_5$ *sont :* $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
  - *L'addition et la multiplication sont définies modulo 5 :* $2 + 3 = 0$ *et* $2 \,.\, 3 = 1$.

Un **corps** peut quant à lui être vu comme un anneau plus précis. Un corps est une structure algébrique, composée d'un ensemble *F* muni de deux opérations, l'addition et la multiplication, qui satisfont à toutes les propriétés des anneaux, ainsi qu'à une propriété supplémentaire :

- La *multiplication inverse* : Pour chaque élément a non nul de F, il existe un élément inverse a^{-1} tel que $a. a^{-1} = a^{-1}. a = 1$, 1 étant l'élément neutre de la multiplication.

Exemples :

- *Le corps* $(\mathbb{R}, +, .)$ *des nombres réels avec les opérations d'addition et de multiplication.*
- *Le corps* $(\mathbb{Q}, +, .)$ *des nombres rationnels avec les opérations d'addition et de multiplication.*
- *Le corps* $\left(\mathbb{F}_p, +\right)$ *fini des nombres premiers avec l'opération modulo* p *où* p *désigne un nombre premier donné. Dans ce corps, l'addition est définie comme l'addition habituelle des entiers, mais suivie d'une réduction modulo* p. *Les corps finis tels que celui-ci sont*

très utilisés en cryptographie et en théorie de l'information.

Exercice :

(19.4.a) Soit l'ensemble $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ avec les opérations d'addition et de multiplication définies modulo 5 (dénotée $*$). $(S, +, *)$ forme-t-il un corps ? Sinon, forme-t-il un anneau ?

19.6. Modules

Les **modules** sont des structures algébriques qui généralisent les espaces vectoriels : les scalaires ne proviennent pas nécessairement d'un corps, mais plutôt d'un anneau qu'il « utilise » pour effectuer des opérations.

Plus rigoureusement, un module M sur un anneau R se définit par les conditions suivantes :

1. *Ensemble sous-jacent* : M est un ensemble non vide dont les éléments sont appelés des vecteurs[41].
2. *Opérations* : M dispose de deux opérations :
    - Une opération d'addition $+$ qui permet d'additionner deux vecteurs de M. Cette opération doit être associative, commutative, posséder un élément neutre (zéro) et avoir des inverses additifs pour chaque vecteur.

[41] On parle parfois aussi d'éléments.

- Une opération de multiplication externe qui permet de multiplier un vecteur de M par un élément de R. Cette opération doit être compatible avec l'addition et l'anneau R, c'est-à-dire respecter les lois de distribution et l'associativité.

3. *Compatibilité* : les opérations d'addition et de multiplication externe doivent être compatibles, ce qui signifie que la multiplication d'un vecteur par un élément de R doit être distributive par rapport à l'addition des vecteurs.
4. *Module nul* : il existe un vecteur spécial appelé « vecteur nul » et noté 0 qui agit comme l'élément neutre pour l'addition.
5. *Inverses additifs* : chaque vecteur de M doit avoir un inverse additif, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{-v}$ dans M tel que $\vec{v} + (\overrightarrow{-v}) = 0$.

Exemple :

Considérons l'anneau $R(x)$ des polynômes à coefficients réels. Nous pouvons définir un module M sur $R(X)$ de la manière suivante :

- *Ensemble sous-jacent : M est l'ensemble des polynômes à coefficients réels, c'est-à-dire M = R[X].*
- *Opérations :*
  - *Addition : l'opération usuelle d'addition de polynômes.*
  - *Multiplication externe : la multiplication habituelle d'un polynôme par un nombre réel.*
- *Compatibilité : les opérations d'addition et de multiplication externe sur le module des polynômes sont compatibles. Si P et Q sont des polynômes et a est un réel, alors $(a * P) + (a * Q) \Leftrightarrow a * (P + Q)$.*

- *Module nul : le vecteur nul (élément neutre pour l'addition) dans ce module est le polynôme nul, noté* 0*, dont tous les coefficients sont égaux à zéro.*
- *Inverses additifs : chaque polynôme a un inverse additif, qui est son négatif. Si* P *est un polynôme, alors son inverse additif est* $-P$*, c'est-à-dire le polynôme dont tous les coefficients sont les négatifs des coefficients de* P*.*

Ainsi, le module des polynômes sur l'anneau des réels $R(X)$ *satisfait à toutes les propriétés requises pour être un module.*

19.7. Tableau récapitulatif

Structure	**Définition**
Groupe	Ensemble avec une opération associative, un élément neutre, et des inverses pour tous les éléments.
Groupe abélien	Groupe dans lequel l'opération est commutative.
Anneau	Ensemble avec deux opérations ($+$ et .), où $(A, +)$ est un groupe abélien et . est associative.
Anneau commutatif	Anneau où la multiplication est commutative.
Anneau unitaire	Anneau avec un élément neutre pour la multiplication tel que $1.a = a.1 = a$
Corps	Anneau unitaire où chaque élément non nul possède un inverse multiplicatif ($a.a^{-1} = 1$).
Module	Ensemble $(M, +)$ sur un anneau A, avec une multiplication scalaire

	respectant la distributivité et l'associativité.
Espace vectoriel	Module particulier défini sur un corps K, où les scalaires proviennent de K.

19.8. Homomorphismes et isomorphismes

Les structures algébriques, telles que les groupes, les anneaux, les corps et les modules, jouent un rôle central dans de nombreuses branches des mathématiques, de la géométrie à la théorie des nombres. Le thème des **homomorphismes** et **isomorphismes** permet d'établir des relations entre ces différentes structures algébriques, notamment comment celles-ci peuvent être « mappées[42] » les unes sur les autres tout en préservant leurs propriétés fondamentales. Il s'agit de l'un des fondements de la théorie des catégories qui ressort de l'algèbre avancée.

Un **homomorphisme** est une transformation qui préserve la structure algébrique entre deux ensembles. En d'autres termes, il s'agit d'une fonction spéciale qui permet de relier deux structures algébriques de même espèce tout en conservant leurs propriétés fondamentales. Les homomorphismes peuvent être envisagés comme des cartographes qui traduisent une structure dans une autre tout en maintenant l'essence de la première.

---

[42] Le terme « mappage » est utilisé décrit la correspondance entre deux ensembles ou structures, où cette correspondance respecte certaines propriétés algébriques spécifiques : les éléments de l'ensemble source sont associés aux éléments de l'ensemble cible d'une manière qui conserve les opérations et les propriétés algébriques. Le terme est souvent utilisé comme synonyme de *fonction*.

Formellement, on appelle homomorphisme de la structure $(G,*)$ dans la structure $(H,\bullet)$ toute application $f : G \to H$ telle que, pour tout x, y appartenant à G : $f(x * y) = f(x) \bullet f(y)$.

L'homomorphisme préserve l'opération $*$ de G et la transforme en l'opération $\bullet$ de H.

Exemple :

Prenons les groupes additifs $(\mathbb{Z}, +)$ *et* $(\mathbb{Z}^2,\oplus)$, *où* $\mathbb{Z}$ *représente l'ensemble des entiers relatifs et* $\mathbb{Z}^2$ *est l'ensemble des entiers modulo 2, c'est-à-dire* $\{0, 1\}$, *avec l'opération de l'addition modulo 2.*
Dans le groupe $(\mathbb{Z}, +)$, *l'opération est l'addition standard des entiers.*
Dans le groupe $(\mathbb{Z}^2,\oplus)$, *l'opération est l'addition modulo 2, qui est définie comme suit :* $a\oplus b = (a + b) mod\ 2$.
Nous pouvons définir un homomorphisme $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$ *comme suit :*
$f(x) = xmod2$.
Il est important de montrer que f *préserve la structure du groupe :*
Pour tout x *et* y *dans* $\mathbb{Z}$, *nous avons :*
$f(x + y) = (x + y)mod2 = (xmod2 + ymod2)mod2 = f(x)\oplus f(y)$.
Sous cet homomorphisme, l'opération de l'addition dans $\mathbb{Z}$ *correspond bien à l'opération de l'addition modulo 2 dans* $\mathbb{Z}^2$.
L'élément neutre, 0, est commun dans $(\mathbb{Z}, +)$ *et dans* $(\mathbb{Z}_2, \oplus)$.
Nous avons $f(0) = 0$, *ce qui préserve l'identité.*
Pour chaque élément x *de* $\mathbb{Z}$, *son inverse par rapport à l'addition est* $-x$. *Et nous avons également* $f(-x) = (-x)mod\ 2 = x\ mod\ 2$, *ce qui préserve l'inverse.*
Par conséquent, f *est un bien homomorphisme entre* $(\mathbb{Z}, +)$ *et* $(\mathbb{Z}^2,\oplus)$.

Un **isomorphisme** est un homomorphisme bijectif qui permet de montrer que deux structures algébriques sont essentiellement les mêmes du point de vue de leur structure.

Exemple :

Considérons les groupes $(\mathbb{Z}, +)$ *et* $(2\mathbb{Z}, +)$*, où* $\mathbb{Z}$ *représente l'ensemble des entiers relatifs, et* $2\mathbb{Z}$ *représente l'ensemble des entiers pairs, avec l'opération d'addition standard.*
Dans le groupe $(\mathbb{Z}, +)$*, l'opération est l'addition standard des entiers.*
Dans le groupe $(2\mathbb{Z}, +)$*, l'opération est également l'addition standard, mais seuls les entiers pairs sont inclus.*
Nous pouvons définir un isomorphisme $f : \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ *comme suit :* $f(x) = 2x$.
Nous vérifions facilement que f *préserve la structure de groupe : pour tout* a *et* b *dans* $\mathbb{Z}$ *:* $f(a + b) = 2(a + b) = 2a + 2b = f(a) + f(b)$.
Sous cet isomorphisme, l'opération d'addition dans $\mathbb{Z}$ *correspond à l'opération d'addition dans* $2\mathbb{Z}$*. De plus,* f *est bijective, car elle associe chaque entier à son double, et inversement.*
Par conséquent, f *est un isomorphisme entre* $(\mathbb{Z}, +)$ *et* $(2\mathbb{Z}, +)$*, ce qui signifie que ces deux groupes sont isomorphes, bien que les ensembles soient différents.*

20. SYSTÈMES DYNAMIQUES ET CHAOS

Les mathématiques donnent souvent l'image d'un monde parfaitement déterministe, où chaque cause entraîne un effet prévisible à qui connaît sa théorie. Pourtant, l'expérience quotidienne raconte une autre histoire : tourbillons qui naissent et disparaissent dans un ruisseau, nuages qui se forment, se déforment, se recomposent et s'évaporent enfin. Ce désordre apparent n'est pas pour autant un abandon des lois mathématiques, il en est l'expression la plus subtile.

Ce chapitre propose une première incursion dans l'étude des **systèmes dynamiques** et du **chaos**, domaines où des règles simples peuvent produire des comportements étonnamment complexes. Il ne s'agira toutefois que d'un aperçu. Leur étude approfondie fait appel à des outils d'analyse qui dépassent le cadre de ce précis et exigent une machinerie mathématique plus élaborée.

Cette étape n'en est pas moins essentielle. Elle montre que les mathématiques ne se limitent pas à des structures bien sages et parfaitement contrôlables, mais qu'elles peuvent aussi décrire l'instabilité, la sensibilité et l'imprévisibilité. Autrement dit, même lorsque la barre semble désertée, les mathématiques conservent le commandement du navire.

Les **systèmes dynamiques** font référence à des entités en évolution constante, où des lois mathématiques décrivent comment ces entités évoluent dans le temps. Ces systèmes sont partout dans le monde physique, des battements de notre cœur à l'orbite des planètes autour du soleil. L'étude des systèmes dynamiques nous permet de comprendre les modèles qui émergent de ces évolutions dans divers contextes.

L'exemple le plus simple de système dynamique est sans doute donné par un simple pendule accroché à fil et relâché hors de son point d'équilibre. Toujours dans le domaine de la mécanique, les interactions gravitationnelles entre la Terre et la Lune forment un système dynamique déjà complexe : les positions et les trajectoires de ces corps célestes sont régies par des équations mathématiques sophistiquées.

Mais certains systèmes dynamiques peuvent adopter un comportement chaotique. Un **système chaotique** est caractérisé par une haute sensibilité aux conditions de départ. D'infimes variations initiales peuvent ainsi conduire à des résultats drastiquement différents. Cependant, malgré cet apparent désordre, ces systèmes sont déterministes, c'est-à-dire que leurs comportements sont entièrement définis par des équations.

Il est dès à présent capital de comprendre qu'un système dynamique conserve deux caractéristiques essentielles :

- Il est *causal* : son évolution ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent ;
- Il est *déterministe* : son état à l'instant t implique un seul état possible à l'instant $t + \varepsilon$[43].

20.1. Systèmes dynamiques

Un **système dynamique** est un modèle mathématique décrivant l'évolution d'un état au cours du temps selon une règle déterminée.

On peut distinguer deux cas simples :

- les systèmes dynamiques **discrets**, décrits par des équations d'itération ;

[43] Cette détermination n'implique pas nécessairement une prévisibilité pratique à long terme, notamment lorsque le système est sensible aux conditions initiales.

- les systèmes dynamiques **continus**, décrits par des équations différentielles.

Dans ce chapitre, nous nous limiterons principalement à des systèmes dynamiques discrets, plus simples à décrire algébriquement.

Un exemple fondamental d'un système dynamique est celui d'un pendule simple, où l'espace des phases X peut être l'espace des positions angulaires et des vitesses angulaires du pendule, et Φ_t décrit l'évolution de ces états au fil du temps en fonction des lois du pendule.

20.2. Bifurcations

Nous avons vu qu'un système dynamique peut être hautement sensible aux variations de ses conditions initiales, pouvant conduire à des changements dramatiques dans son comportement futur. La **bifurcation** est précisément ce moment où un système dynamique subit un tel changement qualitatif dans sa structure ou son comportement en réponse à de petites modifications dans les paramètres ou les conditions initiales. Ces moments de bifurcation sont souvent des points cruciaux dans la compréhension des systèmes complexes, car ils marquent des transitions dans leur dynamique.

Sur un plan formel, considérons un système dynamique décrit par l'équation $f(x, \lambda) = 0$ où x est l'état du système et λ un paramètre. Une bifurcation se produit lorsque, pour certaines valeurs de λ, il y a un changement qualitatif dans le comportement des solutions du système, tel qu'un nouveau point d'équilibre apparaît, un point d'équilibre existant change de stabilité, ou des trajectoires périodiques apparaissent ou disparaissent.

Considérons le système dynamique défini par l'itération $x_{n+1} = r.x_n.(1 - x_n)$. À certaines valeurs spécifiques de r, des bifurcations se produisent, conduisant à des changements dans les trajectoires du système qui restent toutefois régulières et prévisibles.

Ces bifurcations sont des moments clés dans l'étude des systèmes dynamiques, car elles permettent de comprendre comment un système réagit aux changements dans ses paramètres et comment il peut passer d'un comportement ordonné à un comportement complexe. En dynamique des fluides, en aérodynamique, en biologie ou même en musique, ces bifurcations revêtent une importance capitale.

20.3. Systèmes chaotiques

Les **systèmes chaotiques** sont des systèmes dynamiques particuliers. Si les bifurcations d'un système dynamique peuvent conduire à des comportements radicalement différents, il peut en outre arriver que ces comportements soient chaotiques. Les systèmes chaotiques présentent une sensibilité aux conditions initiales, mais aussi une densité topologique et un comportement apériodique.

Ce concept de densité topologique demande à être précisé. Il décrit la distribution spatiale des trajectoires d'un système dynamique dans son espace des phases et exprime à quel point les trajectoires d'un système y sont réparties de manière uniforme ou dense.

Formellement, dans un espace des phases donné X, un ensemble de trajectoires $\{x_t\}$ pour un système dynamique est dite dense topologiquement dans X si, pour tout point y de X, il existe une trajectoire x_t telle que la distance dans X entre y et x_t devient arbitrairement petite quand t tend vers l'infini.

En d'autres termes, pour tout point y dans l'espace des phases, il est possible de trouver une trajectoire du système qui passe à un moment donné arbitrairement près de y. Cela suggère que les trajectoires du système peuvent explorer chaque partie de l'espace des phases, ce qui est une caractéristique commune des systèmes chaotiques.

Dans le contexte des systèmes chaotiques, la densité topologique est souvent associée à l'idée que les trajectoires d'un système chaotique remplissent l'espace des phases de manière dense, sans pour autant se fermer sur elles-mêmes. Cela contribue à la complexité et à l'imprévisibilité du comportement chaotique, car les trajectoires peuvent se rapprocher de n'importe quel point de l'espace des phases.

Par exemple, un robinet légèrement ouvert va laisser passer un filet d'eau laminaire : les molécules d'eau voisines à un instant donné restent voisines aux instants suivants. Mais lorsque la pression augmente, le flux d'eau va se transformer en un écoulement turbulent : il est sans organisation apparente et des molécules initialement voisines pourraient très bien ne plus le rester.

La **bifurcation de Feigenbaum** illustre une transition universelle vers le chaos observée dans de nombreux systèmes dynamiques non linéaires. Elle met en évidence l'existence d'une constante universelle, notée $\delta \approx 4{,}669$ apparaissant dans la succession des bifurcations. Cette notion est présentée ici à titre informatif.

Considérons un système dynamique décrit par une équation d'itération générale :

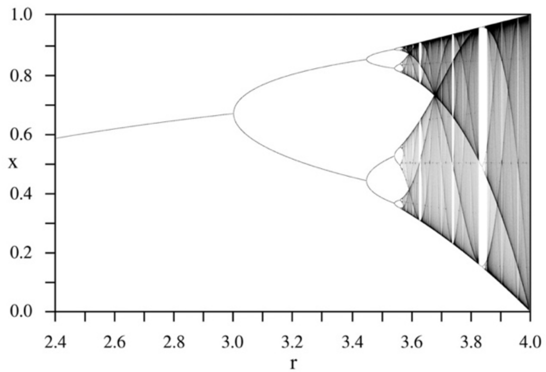
$$x_{n+1} = f(x_n, r)$$

où :

- x_n est la valeur à l'itération n ;
- r est un paramètre ;
- f est une fonction non linéaire.

En modifiant r, le système peut subir une succession de bifurcations de période et, à des valeurs critiques de r, la période des trajectoires du système peut doubler, quadrupler, etc. La bifurcation de Feigenbaum montre que ces rapports de bifurcation convergent vers une constante universelle, appelée constante de Feigenbaum, notée souvent par $\delta \approx 4{,}669$.

À mesure que r continue de varier, on observe une cascade de bifurcations, conduisant finalement à un régime chaotique, où les trajectoires du système semblent se comporter de manière désordonnée et complexe.



Dans le monde physique, le comportement du pendule inversé illustre ce type de bifurcation chaotique. Le pendule inversé est un système où un bras pendulaire est équilibré de manière instable en position verticale et contrôlé pour rester en équilibre.

20.4. Attracteurs étranges et fractales

Les **attracteurs étranges** sont des structures mathématiques fascinantes qui émergent dans le domaine de la théorie du chaos et des systèmes dynamiques non linéaires. Ces objets complexes se caractérisent par leurs propriétés chaotiques et sont associés à des modèles dynamiques où de petites variations initiales peuvent engendrer des trajectoires divergentes de manière imprévisible.

Ces attracteurs ont des formes géométriques complexes, souvent ressemblants à des fractales, et ils se manifestent dans des systèmes variés tels que les équations différentielles, les systèmes itératifs, les automates cellulaires, et d'autres processus dynamiques. Comprendre les spécificités mathématiques de ces attracteurs est crucial pour appréhender la complexité inhérente aux phénomènes chaotiques.

Il importe aussi de comprendre ce qu'est une **structure fractale.** Il s'agit d'un objet mathématique ou géométrique caractérisé par son autosimilarité à différentes échelles. Cela signifie que, lorsque l'on zoome sur une partie de la structure, on observe des motifs similaires à la structure globale, indépendamment de l'échelle à laquelle on observe. Les fractales possèdent des détails infinis et complexes, même à des niveaux de zoom infiniment petits.

Ainsi, une structure S dans un espace E est dite fractale si, pour tout facteur d'échelle $r > 0$, il existe une répétition de cette structure similaire à la structure globale, mais réduite par un facteur r, c'est-à-dire qu'il existe une transformation T_r telle que $T_r(S)$ ressemble a S, mais réduite d'un facteur r. Formellement, $S \approx T_r(s) \forall r > 0$ où T_r est une transformation telle que $T_r(S) = r \times S$.

Les principales caractéristiques des attracteurs étranges sont les suivantes :

- *Sensibilité aux conditions initiales* : L'attracteur présente une forte sensibilité aux conditions initiales, ce qui signifie que des trajectoires initialement proches divergent exponentiellement au fil du temps.
- *Bifurcations et transition vers le chaos* : Les bifurcations se produisent lorsqu'un paramètre du système est modifié. Elles engendrent un changement qualitatif dans la structure de l'attracteur. Certaines bifurcations conduisent à l'apparition d'un attracteur étrange et marquent la transition vers le chaos.

- *Structure fractale* : La structure fractale se réfère à la répétition de motifs à différentes échelles. Dans un attracteur étrange, cette propriété est souvent observée. Par exemple, lorsque vous zoomez sur un attracteur, vous pouvez voir des motifs similaires à différentes échelles, typique des fractales. L'attracteur a par ailleurs souvent une dimension fractale, ce qui signifie que sa dimension mathématique n'est pas un nombre entier. La dimension fractale donne des informations sur la complexité de la structure de l'attracteur.
- *Dynamique non linéaire* : Les équations décrivant l'évolution de l'attracteur sont non linéaires. Cela signifie que les trajectoires ne peuvent pas être obtenues par une simple somme de solutions linéaires. Les termes non linéaires engendrent des comportements complexes, contribuant au caractère chaotique. Mathématiquement, ceci est caractérisé par des exposants de Lyapunov[44] positifs, mesurant une divergence exponentielle des trajectoires voisines, caractéristique d'une évolution chaotique.
- *Apériodicité* : Les trajectoires sur l'attracteur n'entrent pas dans un motif périodique. Au lieu de cela, elles forment un ensemble apériodique et complexe, ce qui signifie qu'il n'y a pas de répétition régulière du comportement.

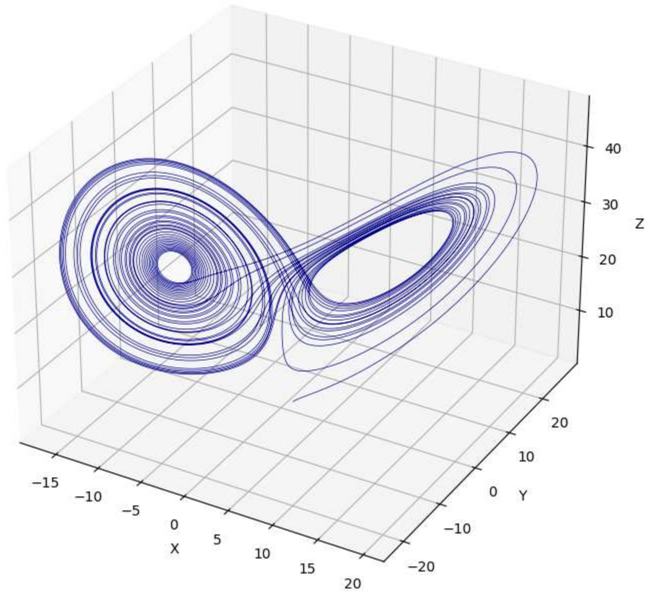
Exemple :

> *L'**attracteur de Lorenz** est sans doute l'exemple le plus célèbre d'attracteur chaotique. Il apparaît dans l'étude d'un système dynamique continu initialement proposé comme modèle simplifié de la convection atmosphérique. Pour certaines*

---

[44] Le calcul des exposants de Lyapunov nécessite des éléments d'analyse supérieure et sortent du champ de ce précis.

valeurs des paramètres, les trajectoires du système ne convergent ni vers un point fixe ni vers un cycle, mais restent confinées dans une région bornée de l'espace tout en évoluant de manière imprévisible.
Graphiquement, l'attracteur de Lorenz présente une forme caractéristique en « papillon ». Une trajectoire individuelle ne repasse jamais exactement par le même point, mais elle reste néanmoins attirée par cette structure globale. Deux trajectoires issues de conditions initiales très proches peuvent rapidement diverger, tout en appartenant au même attracteur : c'est une manifestation typique de la sensibilité aux conditions initiales, signature du chaos déterministe.



Attracteur de Lorenz, Wikimedia Commons, license CC0 1.0 Universal Public Domain

Il est essentiel de souligner que ce comportement chaotique n'est pas dû au hasard. Le système est entièrement déterministe : son évolution est régie par des équations précises. L'imprévisibilité observée résulte uniquement de la complexité dynamique du système.

SOLUTIONS

Les solutions non présentées ici sont vérifiables par l'étudiant, par exemple en réinjectant la valeur trouvée dans l'équation de départ, en développant ce qui a été simplifié ou en vérifiant les valeurs numériques à la calculatrice. Ici ne figurent que les solutions dont la vérification est impossible ou ardue.

(1.7.a) $(4 - 2i)$

(1.7.b) $(8 - i)$

(1.7.c) $\frac{(-1-17i)}{10}$

(1.9.a) $10\ 864\ 197\ 531$ est divisible par 11 : $(1 + 5 + 9 + 4 + 8 + 1) - (3 + 7 + 1 + 6 + 0) = 28 - 17 = 11$

(1.10.a) PGCD(91, 21) = 7 ; PPCM(9,21) = 273

(8.4.a) $]-\infty, \infty[$

(8.4.b) $x \leq \frac{5}{2}$

(8.4.c) $x \neq \frac{1}{2}$

(8.4.d) $x \neq -3\ et\ x \neq 5$

(8.5.a) $12\frac{1}{4}$

(8.5.b) 0,444…

(8.7.a) fonction paire, axe de symétrie et minimum en $x = -1$

(8.7.b) aucune solution

(8.7.c) $x = 9$

(8.7.d) aucune solution

(8.7.e) $(-2,0)$; $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

(8.9.a) $(3, -1)$

(8.9.b) $y = \frac{3x-11}{2}$

(9.1.a) $(f \circ g)(x) = 1 + x\,;\ (g \circ f)(x) = \sqrt{1 + x^2}$

(9.1.b) non

(9.1.c) $x \neq \frac{2}{3}\ ; x \neq 2\ ou\ ]-\infty, \frac{2}{3}[\cup]\frac{2}{2}, 2[\cup]2, \infty[$

(9.2.a) impaire

(9.2.b) $f(x) = 9x^2$

(9.3.a) $F = \frac{9}{5}C + 32$

(9.3.b) $f(x) = x + 3$

(9.3.c) $f(x) = -\frac{2x}{x-1}$

(9.3.d) $f(x) = 3 \pm \sqrt{x}$

(10.2.a) $x \in]-\infty, 1[\cup]3, \infty[$

(10.2.b) $x \in]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, \infty[$

(10.3.a) $\left\{-4\,;\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ :\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

(10.3.b) $\{-3\,; i\,;\ -i\}$

(11.2.a) $\log_3 20$

(11.2.b) $4 \ln x + \ln y - \ln 7$

(11.2.c) $\frac{\ln 3}{\ln 5}$

(11.2.d) $\ln(2x^7)$

(11.3.a) $x = 3$

(11.3.b) $x = \frac{1}{10}$

(11.3.c) $x = \ln 8$

(11.3.d) Aucune solution

(11.3.e) $x = \frac{101}{11} \approx 9{,}2$

(12.2.a) maximum : 6 ; minimum : –2 ; amplitude : 8 ;
période : 2π

(12.2.b) maximum : 4 ; minimum : -2 ; amplitude : 6 ;
période : π

(12.2.c) $\alpha = \left\{\frac{\pi}{2} + 6\pi n, \frac{5\pi}{2} + 6\pi n\right\}$ où $n \in \mathbb{Z}$

(12.2.d) $\alpha = \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}\right\}$

(12.2.e) $\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$ où $n \in \mathbb{Z}$

(12.2.f) $\alpha = \left\{2\pi n, 2\pi n + \frac{\pi}{2}\right\}$ où $n \in \mathbb{Z}$

(13.2.a) $z \approx 5(\cos(-0{,}92) + i\sin(-0{,}93))$

(13.2.b) $z^3 \approx -73{,}375 - 224{,}5i$

(13.3.a) $z^3 = -10 + 198i$

(13.3.b) $z_0 \approx 2{,}498 + 0{,}884i$ et $z_1 \approx -2{,}498 - 0{,}884i$

(13.4.a) $\ln(2) + 2\left(n - \frac{1}{3}\right)\pi i$

(14.1.a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$

(14.1.b) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$

(14.1.c) $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$

(14.2.a) $(x+6)^2 = -16(y+1)$

(14.3.a) $\frac{x^2}{400} - \frac{(y+8)^2}{576} = -1$

(14.4.a) $(-0{,}49\,;6{,}98)$ et $(4{,}97\,;\ -3{,}94)$

(14.4.b) $(3{,}0)$, $\left(-\frac{7}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ et $\left(-\frac{7}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$

(14.4.c) $(-7{,}28\,;\ -10{,}5), (7{,}28\,;\ -10{,}5), (-2{,}24\,;\ 1{,}5)$ et $(2{,}24\,;\ 1{,}5)$

(14.4.d) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$ et $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$

(14.4.e) 6 m × 12 m

(15.1.a) $u_n = -4 + 5n$

(15.1.b) 695

(15.1.c) 135

(15.1.d) $\sum_{n=1}^{4} 2n$

(15.2.a) $x_n = 10 \times 3^{n-1}$

(15.2.b) $\{5, -10, 20, -40\}$

(15.2.c) $\approx 5{,}336$

(15.2.d) $\frac{1-2^{64}}{-1} = 2^{64} - 1$

(15.6.a) Pour appliquer le critère de Cauchy, nous devons montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que, pour tout $n, m \geq N$, nous avons :

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{k^2}{2^k}\right| < \varepsilon$$

Nous déduisons par calcul que :

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{k^2}{2^k}\right| = \frac{4(m+1)^2}{3.2^m}$$

Pour garantir que cette quantité soit inférieure à ε, nous choisissons N tel que $\frac{4(m+1)^2}{3.2^m} < \varepsilon$ pour tout $m \geq N$. Le critère de Cauchy démontre la convergence de la série.

(16.2.a) 5

(16.2.b) $\overrightarrow{u+v} = (2{,}2)$; $\overrightarrow{u-v} = (4, -6)$

(16.4.a) (-1,3)

(16.4.b) (0,5)

(16.5.a) $\vec{v} = 3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$

(16.5.b) Les deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont parallèles et ne peuvent donc servir de base vectorielle. L'exercice est donc impossible.

(16.6.a) $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 3t - \frac{5}{2} \end{cases}$

(16.6.b) $y = \frac{x}{2} + 3$

(17.1.a) $C = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 30 & 11 \end{bmatrix}$

(17.1.b) $D = \begin{bmatrix} -9 & 10 & 10 \\ 4 & -8 & -12 \\ 10 & 4 & 21 \end{bmatrix}$

(17.3.a) $\det(A) = 2$

(17.3.b) $\det(B) = -21$

(17.7.a) $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 5$

(17.7.b) $\begin{bmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$

(18.1.a)

P	Q	R	$(P \wedge Q)$	$(\neg P \wedge R)$	$(Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R) \Rightarrow (Q \vee R)$
V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	F	F

(18.1.b) $(P \wedge Q \Rightarrow \neg R)$

(18.1.c) $A \Rightarrow B$ est équivalent à $\neg A \vee B$, ce qui permet de transformer la formule initiale en $(\neg P \wedge Q) \vee (P \vee \neg Q)$.

L'application d'une loi de Morgan à la négation de la conjonction permet d'obtenir $(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \vee \neg Q)$.

Par commutativité et associativité, la formule peut être réécrite : $(\neg P \vee P) \vee (\neg Q \vee \neg Q)$.

Chacune des parenthèses étant toujours vraie, leur connexion par $\vee$ l'est aussi, c'est donc bien une tautologie.

(18.2.a) Oui, et le tableau sémantique ne comporte qu'une seule branche.

(18.3.a) x désignant la qualité des plats, $C(x) = \begin{cases} 0{,}3 \ si \ x = 1 \\ 0{,}2 \ si \ x = 2 \\ 1{,}0 \ si \ x = 3, 4, 5 \end{cases}$

(19.1.a) Non, car $\frac{1}{0}$ est indéterminé.

(19.1.b) Non, car la condition d'associativité n'est pas satisfaite.

(19.4.a) S est bien pourvu de toutes les propriétés nécessaires à un anneau, mais pour que S soit également un corps, chaque élément non nul dans S a un inverse multiplicatif dans S. Mais si nous prenons $a = 2$, nous cherchons un élément b tel que $2.b \equiv 1(mod\ 5)$, ce qui est impossible, car $2.1 \equiv 2\,;\ 2.3 \equiv 1$ et $2.4 \equiv 3$, aucun de ces produits n'étant égal à $1\ mod\ 5$. Par conséquent, S n'est pas un corps, car il existe au moins un élément non nul de S qui n'a pas d'inverse multiplicatif.